平成15年度 後期

線形代数学オ二 期末試験
解答例

1. $x(1) = A x(0)$

$x(2) = A x(1) = A^2 x(0)$ より

$x(k) = A x(0)$

Aの固有ベクトルを列ベクトルとする行列をS，固有値を対角要素とする対角行列をΛとすると，

$$A = S \Lambda S^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

これより

$$A^k = S \Lambda^k S^{-1}$$

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Aの固有値

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \text{より}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

固有ベクトル

$$\lambda_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u_1 = v_1 = 1$ とする.

$$\lambda_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-2 & 0 \\ -1 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u_2 = 0, \quad v_2 = 1$ とする

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) $x(3) = 1^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ //

(b) $t \to \infty$ とすると

$$x(\infty) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \infty \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\infty \end{bmatrix} //$$

2. 係数行列の固有値と固有ベクトルを求める.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1) = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 \to \begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{11} = x_{12} = 1 \to x_1 = [1, 1]^T$$

$$\lambda_2 \to \begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{21} = 1, \quad x_{22} = -1 \to x_2 = [1, -1]^T$$

一般解

$$u(t) = (c_1 e^{\sqrt{3}t} + d_1 e^{-\sqrt{3}t}) x_1 + (c_2 e^{\sqrt{1}t} + d_2 e^{-\sqrt{1}t}) x_2$$

初期値

$$u(0) = (c_1 + d_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (c_2 + d_2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{d\,u(t)}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{3}(c_1 - d_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (c_2 - d_2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} g_1 = c_1 + d_1 \\ g_2 = c_2 + d_2 \end{matrix} \quad \to \begin{cases} g_1 = \frac{1}{2} \\ g_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} f_1 = c_1 - d_1 \\ f_2 = c_2 - d_2 \end{matrix} \quad \to f_1 = f_2 = 0$$

$$\therefore c_1 = d_1, \quad c_2 = d_2$$

以上より,

$$c_1 = d_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = d_2 = -\frac{1}{4}$$

$$u(t) = \frac{1}{4}(e^{\sqrt{3}t} + e^{-\sqrt{3}t}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}(e^{t} + e^{-t}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} //$$

3.

$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} | & | \\ x_1 & x_2 \\ | & | \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ とすると

$\mathbb{A} = \mathbb{S} \Lambda \mathbb{S}^{-1}$ と表される.

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbb{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} //$$

4.

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{S}\Lambda_1\mathbb{S}^{-1})(\mathbb{S}\Lambda_2\mathbb{S}^{-1}) = \mathbb{S}\Lambda_1\Lambda_2\mathbb{S}^{-1}$$
$$= \mathbb{S}\Lambda_2\Lambda_1\mathbb{S}^{-1} = (\mathbb{S}\Lambda_2\mathbb{S}^{-1})(\mathbb{S}\Lambda_1\mathbb{S}^{-1}) = \mathbb{B}\mathbb{A}$$

上式では,「対角行列の積は交換可能である」という性質を利用している. $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$

$\mathbb{A}$の固有値と固有ベクトルを求める.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \text{ より}$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$

$$\lambda_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ -1 & 3-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_{11} + 2x_{12} = 0 \quad \therefore x_{11} = 2,\ x_{12} = 1$$

$$\lambda_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-3 & 0 \\ -1 & 3-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{21} = 0,\ x_{22} = 1$$

以上より,

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbb{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{B}$の固有値を例えば $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ とすると

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} //$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},\quad \mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ となっている.

5. Aの固有値を対角要素とする対角行列をΛ，固有ベクトルを列ベクトルとする行列をSとすると，

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

と表される．A^Tを求める．

$$A^T = (S^{-1})^T \Lambda^T S^T$$

さらに，$(S^{-1})^T = (S^T)^{-1}$であることを利用する(＊)．

(＊) $SS^{-1} = I$ の両辺を転置する

$$(S^{-1})^T S^T = I^T = I$$

この式はS^Tの逆行列が$(S^{-1})^T$であることを表している．すなわち，

$$(S^{-1})^T = (S^T)^{-1}$$

が成り立つ．

$$A^T = (S^T)^{-1}\Lambda S^T, \quad \Lambda^T = \Lambda$$

ここで，$B = (S^T)^{-1}$とおくと，

$$A^T = B\Lambda B^{-1}$$

となる．ここで，BはA^Tの固有ベクトルを列ベクトルとする行列，ΛはA^Tの固有値を対角要素とする対角行列である．

従って，AとA^Tの固有値は等しくなる．

6. Aの固有値を求める．

(a) $$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1$$

Aが正定値行列であるための必要十分条件は「全ての固有値が正であること」である．Aの固有値は全て負であるから<u>正定値ではない</u>．

(b) $$f = [x_1 \ x_2]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \ /\!/$$

(c) $(x_1, x_2) = (0, 0)$で $f = 0$

さらに，次式に左からx^Tを掛ける

$$Ax = \lambda x$$

$$x^TAx = \lambda x^Tx = \lambda \|x\|^2$$

$$\therefore f = x^TAx = \lambda\|x\|^2$$

fは$x = 0$以外では常に負である．従って，$x = 0$における$f = 0$は<u>最大値</u>である．

7.（問題ではAの数値がありませんでした）

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とする。

(a)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1) = 0$$

$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$

固有値が全て正であるからAは正定値行列である。

(b)

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore x_{11} = x_{12} = 1$$

$x_1 = [1, 1]^T \rightarrow$ 正規化 $\Rightarrow x_1 = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{cases} x_{21} = 1 \\ x_{22} = -1 \end{cases}$$

$x_2 = [1, -1]^T \rightarrow$ 正規化 $\rightarrow x_2 = [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$

(c) $Q^{-1} = Q^T$ であるから、

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$$

$$x^T A x = x^T Q \Lambda Q^T x = (Q^T x)^T \Lambda (Q^T x)$$

ここで、$y = Q^T x$ とおく（問題では $y = Qx$ とありますが、これは $y = Q^T x$ の間違い）

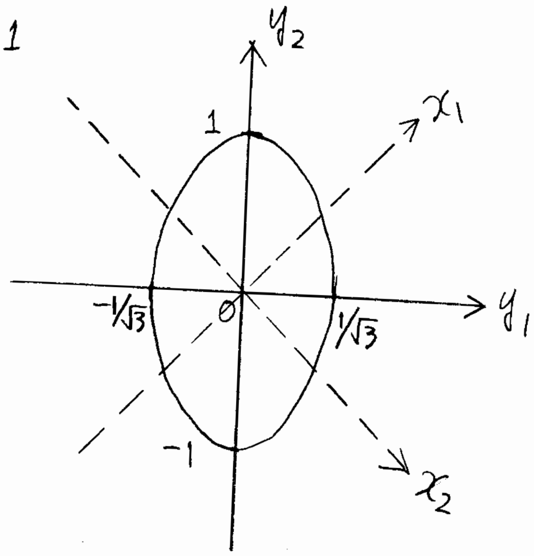
$$x^T A x = y^T \Lambda y \,/\!/$$

$$= [y_1\ y_2]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \,/\!/$$

(d) $x^T A x = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$

$$\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1$$

$$\therefore \frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2} = 1$$



(e)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2}, & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2}, & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$（x_2軸）が $y_2 = -y_1$ に対応

$x_2 = 0$（x_1軸）が $y_2 = y_1$ に対応