

# 線形代数学第 2 - 中間試験問題 -

情報システム工学科 1 年生 平成 15 年度後期 - 2003.12.10 -

問題文中,  $a = (1, 1, 0)$  などは  $a = [1, 1, 0]^T$ , 即ち, 縦ベクトルを意味する. また, 太字がベクトル, 行列を表す.

1. 直線  $y = C + Dt$  で 3 点  $(t, y) = (1, 2), (2, 3), (3, 5)$  を近似するとき, 誤差の二乗和を最小にするように  $C, D$  を求めよ.  $y, C, D, t$  はスカラーである.
2. 線形独立なベクトル  $a_1 = (1, -1, 0), a_2 = (1, 0, -1), a_3 = (1, -1, 2)$  を互いに直交するベクトル  $v_1, v_2, v_3$  に変換せよ (ベクトルの長さを 1 にする必要はない). Gram-schmidt の直交化法を利用する.
3. 次のベクトルは線形独立であるか調べよ.

$$\mathbf{a} = (1, -1, 2, 1, 1)$$

$$\mathbf{b} = (1, 0, 1, 2, 0)$$

$$\mathbf{c} = (0, 2, 1, 3, -1)$$

4. 次の行列  $Q$  をベクトル  $x$  に掛けて得られる  $Qx$  は, ベクトル  $x$  の長さを変えずに角度を  $\theta$  だけ回転させることを示せ.

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

5. 次に示す行列式の性質 (1) (2) (3) のいずれかを用いて, 性質 (4) を証明せよ.

- (1) 行列式は一つの行に関して線形である.
- (2) 2つの行が交換されると行列式は符号を変える.
- (3) 単位行列の行列式は 1 である.
- (4) 2つの行が等しければ, 行列式は零である.

6. 次の行列式を求めよ. 行列の性質 1 ~ 10, または行列式の適当な公式を用いて計算する.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -2 & 0 \\ 9 & -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

7. 行列  $A$  の要素が全て整数であって, かつ,  $\det A$  が 1 か  $-1$  であるとき,  $A^{-1}$  の要素が全て整数であることを示せ.

8.  $Ax = 0$  となる零でないベクトル  $x$  が存在するとき,  $\det A$  を求めよ. 理由も記すこと.