平成15年度 後期　　2003.12.10

線形代数学オ2 − 中間試験 − 解答例

[1] 次の方程式を満すC, Dを求める.

$$\begin{aligned} C + D &= 2 \\ C + 2D &= 3 \\ C + 3D &= 5 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow Ax = b$$

誤差の二乗和は $\|Ax - b\|^2$ であり, これを最小とする x は最小2乗解であり, 次の正規方程式により求められる.

$$A^TA\bar{x} = A^Tb \qquad \therefore \quad \bar{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

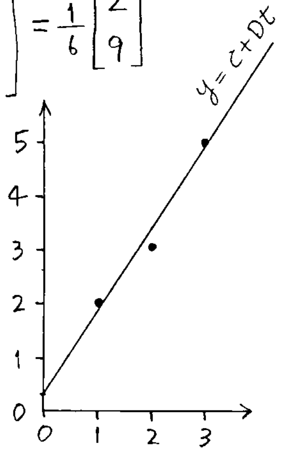
$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad (A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad C = \frac{1}{3}, \quad D = \frac{3}{2} \quad //$$

$$y = \frac{1}{3} + \frac{3}{2}t$$



[2]

$$v_1 = a_1 = [1, -1, 0]^T \quad //$$

$$v_2 = a_2 - \frac{v_1^Ta_2}{v_1^Tv_1}v_1$$

$$v_1^Tv_1 = [1 \ -1 \ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$v_1^Ta_2 = [1 \ -1 \ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\therefore \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad //$$

$$v_3 = a_3 - \frac{v_1^Ta_3}{v_1^Tv_1}v_1 - \frac{v_2^Ta_3}{v_2^Tv_2}v_2$$

$$v_1^Ta_3 = [1 \ -1 \ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$v_2^Tv_2 = [1/2 \ \ 1/2 \ \ -1]\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$v_2^Ta_3 = [1/2 \ \ 1/2 \ \ -1]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -2$$

$$\therefore \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad //$$

[3] a, b, c を行ベクトルとする行列 A を考え, この行列のピボットを調べる.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

全てのピボットが零ではないから a, b, c は線形独立である.

[4] $x = [x_1, \ x_2]^T$ とする.

$$y = Qx = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= (x_1\cos\theta - x_2\sin\theta)^2 + (x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)^2 \\ &= x_1^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + x_1x_2(-2\cos\theta\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta) \\ &\quad + x_2^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2 \end{aligned}$$

長さは変わらない

x の角度を α とする.

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\|x\|}, \quad \sin\alpha = \frac{x_2}{\|x\|}$$

y の角度を β とする.

$$\cos\beta = \frac{1}{\|y\|}(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta = \cos(\alpha + \theta)$$

$$\sin\beta = \frac{y_2}{\|y\|} = \frac{1}{\|y\|}(x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)$$

$$= \cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta = \sin(\alpha+\theta)$$

以上より　$\beta = \alpha+\theta$ となり，y は x を θ だけ回転したものである．

(前半の別解)

$$Q^TQ = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix} = I$$

$$\|y\|^2 = y^Ty = x^TQ^TQx = x^Tx = \|x\|^2$$

[5]　行列 A の第 i 行 a_i と第 j 行 a_j が等しいとする．A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列を B とする．

$$A = \begin{bmatrix}- a_i - \\ - a_j -\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}- a_j - \\ - a_i -\end{bmatrix}$$

$a_i = a_j$ より　$A = B$ であり，

$\det A = \det B$　が成り立つ

性質2 より　$\det A = -\det B$

これらより，　$\det A = \det B = 0$　となる．//

[6]

A … 第3行が零であるから　$\det A = 0$ //

B … ガウスの前進消去により3角行列に変形する．

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix} \quad \therefore \det B = 1\times(-1)\times 3\times(-4) = 12 \ //$$

C … 余因子展開を用いる．

$$\det C = \begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 6 & 0\end{vmatrix} = (-1)^{1+1}2\begin{vmatrix}0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 0\end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2}2\begin{vmatrix}0 & -2 \\ 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$= -4\times 2 = -8 \ //$$

D … 3角行列であるから行列式は対角要素の積になる．

$$\det D = 2\times 1\times(-2)\times 2 = -8 \ //$$

[7]　A^{-1} は行列式を用いて次のように表される．

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,A}{\det A}$$ ，　$\mathrm{adj}\,A$ の第 i 行第 j 列は余因子 A_{ji} である．

A_{ji} は A の要素の積で表されるから，条件より整数となる．また，$\det A$ も 1 または -1 であるから A^{-1} の要素は整数となる．//

[8]　行列 A を $m\times n$ $(m=n)$ 行列とし，階数を r とする．$Ax=0$ を満たす零でない x が存在するための条件は自由変数（$=n-r$ 個）が存在することであり，$n-r>0$ が成り立つ．一方，$n-r>0$ が成り立つときは行（列）ベクトルが線形独立ではない（ピボットが零となる）ことになり，行列 A は特異行列となり，行列式は零となる．

$\det A = 0$ //

(理由として)　$n-r>0$ より

(1)　行（列）ベクトルが線形独立でない．

(2)　A が特異行列である．

(3)　零のピボットが現れる．

(4)　ガウスの前進消去により零となる行が生じる．

などの理由により，　$\det A = 0$