

線形代数学第 2 - 期末試験問題 -

情報システム工学科 1 年生

平成 16 年度後期 - 2005.2.9 -

1. 次の文章は行列の固有値, 固有ベクトルについて説明したものである. 文章中の (ア) ~ (コ) に該当するものを下欄の選択肢から選べ. 選択肢から複数回選ばれる場合もある.

「ベクトル a に行列 A を乗じると, 一般にベクトルの (ア) と (イ) が変化する. しかし, A の固有ベクトル x の場合は (ウ) は変化せず (エ) のみが変わる. その変化は (オ) により決まる. エルミット行列あるいは対称行列 A はその固有ベクトルの (カ) に (キ) を掛けたものの和として表される (スペクトル定理). また, Aa はベクトル a を (ク) 上の成分に分解し (ケ) 倍したものの和で表される. 三角行列の (コ) は対角要素と同じである。」

< 選択肢 > 1. 固有値 2. 固有ベクトル 3. 角度 4. 長さ 5. 内積 6. 外積
7. スカラー 8. ベクトル 9. 行列

2. 次の微分方程式を解け. また, この微分方程式の解は安定であるか, 不安定であるか示せ.

$$\frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{u}(0)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 2×2 のエルミット (対称) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル x_1, x_2 が次のように与えられている. 行列 A を求めよ.

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

4. エルミット行列の固有ベクトルは, これらの固有値が異なるとき互いに直交することを証明せよ.

(参考) エルミット行列は $A^H = A$ を満たす. $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ において, $\lambda \neq \mu$ のとき, x と y が直交することを証明する.

5. 次の問に答えよ.

(a) 次の式を完全平方の形で表せ.

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

(b) $a > 0, ac - b^2 = 0$ であるとき, $f(x, y)$ は原点以外の直線上でも零となる. $f(x, y)$ が零となる直線の式を求めよ. また, このような場合をなんと呼ぶか? (例: 正定値など).

6. 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求めて, 正定値行列であるか否かを調べよ.

(b) 単位固有ベクトル x_1, x_2 を求めよ (ベクトルの長さ = 1)

(c) 固有値を対角要素とする対角行列を Λ とする. 単位固有ベクトルを列ベクトルとする行列を Q として, $y = Q^T x$ とするとき, $x^T A x$ を Λ と y を用いて表せ. さらに, $y = [y_1, y_2]^T$ とするとき, $x^T A x$ を y_1, y_2 と λ_1, λ_2 を用いて表せ (参考) $A = Q \Lambda Q^T$.

(d) $x^T A x = 1$ のグラフを $y_1 - y_2$ 座標上に図示せよ.

(e) $x = [x_1, x_2]^T$ とするとき, 上のグラフに $x_1 - x_2$ 軸を書き込め.

(f) ベクトルに行列 Q を掛けることは, そのベクトルをどのように変化させるか述べよ.

7. 零でないベクトル x に対して $x^T A x > 0$ であるとき, A の全ての固有値は正である ($\lambda_i > 0$). これらの条件が成り立つとき, A の左上の $k \times k$ 部分行列 A_k の行列式が全て正であることを証明せよ.