

線形代数学第2 一期末試験問題一

情報システム工学科1年生

平成17年度後期-2006.2.8-

1. 次の文章は2次形式や行列の正定値について述べたものである。文中の(ア)～(サ)に該当する語句や式を選択肢から選んで数字で答えよ。

「2次形式 $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ は原点 $x = 0, y = 0$ で0となる。また、原点における偏微分は(ア)となる。 $f(x, y)$ が原点以外で(イ)であるとき、正定値であるという。 $f(x, y)$ が正定値であるために a が満たすべき条件は(ウ)であり、 a, b, c に対する条件は(エ)である。これらの条件から、 c に対する条件は(オ)となる。 $f(x, y)$ は原点で(カ), (キ), (ク)のいずれかになる。 $f(x, y)$ が原点以外でも最小値として0をとるとき、(ケ)と呼ばれる。2次形式をベクトルと行列で表現すると、 $f(x) = x^T A x$ となる。但し、 $x = [x, y]^T$ である。 $f(x)$ が正定値となるための必要十分条件は行列 A の(コ), (サ)が正となることである。」

<選択肢> 1)0, 2)正, 3)負, 4) $a < 0$, 5) $a = 0$, 6) $a > 0$, 7) $ac - b^2 = 0$, 8) $ac - b^2 > 0$, 9) $ac - b^2 < 0$, 10) $c < 0$, 11) $c = 0$, 12) $c > 0$, 13)最小値, 14)最大値, 15)鞍形点, 16)固有値, 17)ピボット, 18)固有ベクトル, 19)正定値, 20)負定値, 21)不定値, 22)半負定値, 23)半正定値

2. 次の微分方程式を解け。また、この微分方程式の解は安定であるか、不安定であるか示せ。

$$\frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{u}(0)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 次の行列に関して、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

- (a) A をスペクトル定理で分解せよ。
(b) A を固有値の大きい成分のみを用いて表せ。

4. 以下を証明せよ。

- (a) 行列 A の固有値の和は A の対角要素の和に等しい。
(b) 行列 A の固有値の積は A の行列式に等しい。

5. 以下を証明せよ。

- (a) 2×2 の行列 A の固有値 λ_1, λ_2 が異なるとき、固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は線形独立である。
(b) 2×2 の対称行列 A の固有値 λ_1, λ_2 が異なるとき、固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は直交する。

6. 次の行列 A に対して、 e^{At} を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

7. 行列 A の全てのピボット d_k が正であるとき、零でない全てのベクトル \mathbf{x} に対して $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ となることを証明せよ。