

線形代数学第2 — 中間試験問題一

情報システム工学科 1 年生

平成 17 年度後期 — 2006.1.11 —

1. 方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ の最小二乗解に関する以下の記述の空欄 (ア) ~ (ク) を下の用語または式から選択せよ。番号で答えよ。

最小二乗解とは (ア) を最小にする解である。 \mathbf{Ax} は行列 \mathbf{A} の (イ) 空間にあるベクトルであり、 \mathbf{x} によっていろいろな値をとる。(ア) を最小にするためには $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ と \mathbf{Ax} が (ウ) する必要がある。これを式で表すと (エ) となる。この式を展開して (オ) となる。この式は (カ) 方程式と呼ばれる。 $\mathbf{x} = (\text{キ})\mathbf{b}$ としたとき、(キ) のことを (ク) と呼ぶ。

【選択肢】 1) $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$, 2) $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$, 3) 正規, 4) 連立, 5) 特異行列, 6) 擬似逆行列, 7) 対称行列, 8) 直交, 9) 平行, 10) 零, 11) 列, 12) 行, 13) $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$, 14) $(\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$,

2. 直線 $y = C + D2^t$ で 3 点 $(t, y) = (0, 1), (1, 3), (2, 6)$ を近似するとき、誤差の二乗和を最小にするように C, D を求めよ。 t, y, C, D はスカラーである。また、このグラフを $t-y$ 平面上に図示せよ。
3. 線形独立なベクトル $\mathbf{a}_1 = [1, -1, 0]^T, \mathbf{a}_2 = [0, -1, 1]^T, \mathbf{a}_3 = [1, 1, -1]^T$ を互いに直交するベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ に変換せよ (ベクトルの長さを 1 にする必要はない)。Gram-Schmidt の直交化法を利用する。

4. 次のベクトルが線形独立であるか否かを調べよ。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (1, -1, 2, 1, 1) \\ \mathbf{b} &= (1, 0, 1, 2, 0) \\ \mathbf{c} &= (-1, -1, 0, -3, 1) \end{aligned}$$

5. 次の行列式を求めよ。行列の性質 1 ~ 10, または行列式の適当な公式を用いて計算する。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

6. 直交行列 \mathbf{Q} に関する以下の問いに答えよ。但し、直交行列は $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ を満たす。

- (a) \mathbf{Qx} の長さは \mathbf{x} の長さと同じであることを示せ。
 (b) 下記に示す行列 \mathbf{A} が直交行列であることを示せ。
 (c) あるベクトルに行列 \mathbf{A} を掛けることによりベクトルの角度が変化する。角度の変化を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

7. 次の文章または式が正しいか、正しくないか示せ。正しくない場合は、その理由も述べること。

- (a) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つとき $r = n$ である。但し、 \mathbf{A} は $n \times n$ 行列で r は階数である。
 (b) $\det(2\mathbf{A}) = 2 \det \mathbf{A}$
 (c) 行列 \mathbf{A} の第 1 行を 2 倍して第 3 行に加えた行列を \mathbf{B} とするとき、 $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$ 。
 (d) ベクトル \mathbf{b} が行列 \mathbf{A} の列空間に含まれないとき、方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ は一意解を持つ。