線形代数学第２ー期末試験問題ー

情報システム工学科１年生　　　平成１８年度後期ー 2007.1.31 ー

1. 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$，固有ベクトルが $\boldsymbol{x}_1 = [1, -1]^T, \boldsymbol{x}_2 = [0, 1]^T$ であるとき，$\boldsymbol{A}^k$ を求めよ。

2. 各行の要素の和が 1 となる 3×3 行列を書き下し，$\lambda = 1$ が固有値であることを示せ。また，その固有ベクトルを求めよ。

3. ２次元ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = [x_1(n), x_2(n)]^T$ が次式により更新される。

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n), \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{x}(2)$ を求めよ。
(b) $n \to \infty$ としたとき，$\boldsymbol{x}(n)$ はどうなるか。

4. 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ であるとき，
(a) $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ。
(b) $\boldsymbol{A}$ のトレース（対角要素の和）を求めよ。
（参考）固有値と行列式及びトレースの関係を求める必要はなく，これらの関係に固有値の数値を代入して計算する。

5. 行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が同じ固有ベクトルを持ち，固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{S}$ によって，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{S}^{-1}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{S}^{-1}$ と表されるとき，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ となることを証明せよ。また，次の $\boldsymbol{A}$ に対する $\boldsymbol{B}$ の例を求めよ。但し，$\boldsymbol{B}$ の固有値は適当に与えるものとする。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

6. 次の微分方程式を解け．また，この微分方程式の解は安定であるか，不安定であるか示せ.

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{u}(0)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. 以下の性質を証明せよ。
(a) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$ であれば，任意の複素ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ は実数となる。
(b) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$ を満たす行列の全ての固有値は実数である。

8. 複素ベクトル $\boldsymbol{x} = [1+i, 1-i]^T$ と $\boldsymbol{y} = [1, i]^T$ について
(a) 各々の長さ（ノルム）を求めよ（$\sqrt{数値}$ の形でよい)。
(b) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を求めよ。

9. ベクトル $\boldsymbol{a} = [1, 2]^T$ に行列 $\boldsymbol{A}$ を掛けることにより，$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{x}_1 = [1, 0]^T$ 方向の成分 (*) を 2 倍，$\boldsymbol{x}_2 = [0, 1]^T$ 方向の成分 (*) を-1 倍したい。$\boldsymbol{A}$ を求めよ。（参考）(*) は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x}_1$ 及び $\boldsymbol{x}_2$ 上への射影に相当する。（ヒント：スペクトル定理）