線形代数学第２－期末試験問題－

情報システム工学科１年生　　平成１８年度後期－ 2007.1.31 －

10 1. 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$，固有ベクトルが $\boldsymbol{x}_1 = [1, -1]^T, \boldsymbol{x}_2 = [0, 1]^T$ であるとき，$\boldsymbol{A}^k$ を求めよ。

10 2. 各行の要素の和が 1 となる 3×3 行列を書き下し，$\lambda = 1$ が固有値であることを示せ。また，その固有ベクトルを求めよ。

5×2

10 3. ２次元ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = [x_1(n), x_2(n)]^T$ が次式により更新される。

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n), \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5×2 (a) $\boldsymbol{x}(2)$ を求めよ。

(b) $n \to \infty$ としたとき，$\boldsymbol{x}(n)$ はどうなるか。

10 4. 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ であるとき，

5×2 (a) $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ。

(b) $\boldsymbol{A}$ のトレース（対角要素の和）を求めよ。

（参考）固有値と行列式及びトレースの関係を求める必要はなく，これらの関係に固有値の数値を代入して計算する。

10 5. 行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が同じ固有ベクトルを持ち，固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{S}$ によって，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{S}^{-1}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{S}^{-1}$ と表されるとき，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ となることを証明せよ。 5 また，次の $\boldsymbol{A}$ に対する $\boldsymbol{B}$ の例を求めよ。 5 但し，$\boldsymbol{B}$ の固有値は適当に与えるものとする。

5×2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

20 6. 次の微分方程式を解け. 15 また，この微分方程式の解は安定であるか，不安定であるか示せ. 5

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t), \qquad \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{d\boldsymbol{u}(0)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10 7. 以下の性質を証明せよ。

(a) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$ であれば，任意の複素ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ は実数となる。

5×2 (b) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$ を満たす行列の全ての固有値は実数である。

10 8. 複素ベクトル $\boldsymbol{x} = [1+i, 1-i]^T$ と $\boldsymbol{y} = [1, i]^T$ について

(a) 各々の長さ（ノルム）を求めよ（$\sqrt{\text{数値}}$ の形でよい）。

5×2 (b) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を求めよ。

10 9. ベクトル $\boldsymbol{a} = [1, 2]^T$ に行列 $\boldsymbol{A}$ を掛けることにより，$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{x}_1 = [1, 0]^T$ 方向の成分 (*) を２倍，$\boldsymbol{x}_2 = [0, 1]^T$ 方向の成分 (*) を-1 倍したい。$\boldsymbol{A}$ を求めよ。（参考）(*) は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x}_1$ 及び $\boldsymbol{x}_2$ 上への射影に相当する。（ヒント：スペクトル定理）

線形代数学第二期末試験
― 解答例 ―

1. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を列ベクトルとする行列を S とし，λ_1, λ_2 を対角要素とする行列を Λ とすると，A は次式で表される．

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

これより，

$$A^k = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\cdots(S\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^k S^{-1}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

以上より，

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1+(-1)^k, & (-1)^k \end{bmatrix} //$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{とする．}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda) - 2 + (1+\lambda) - 2(1-\lambda) = 0 \quad \cdots (1)$$

式(1)が $\lambda = 1$ で零となるから，$\lambda = 1$ が固有値となる．//

固有ベクトルは次式で計算される．

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1-1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これより，

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

これを解いて

$$x_1 = x_2 = x_3$$

を得る。固有ベクトルは（簡単な数字を用いて）次のようになる。

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ //

3. 一般解は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x}(0)$$

$\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求める。$\boldsymbol{A}$ は3角行列であるから、

$$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 0.5$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ -1 & 0.5-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = -2 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 0.5 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-0.5 & 0 \\ -1 & 0.5-0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} u_2 = 0 \\ v_2 = 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2+2\cdot 0.5^n, & 0.5^n \end{bmatrix}$$

(a) $n=2$ の場合

$$\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{7}{4} \end{bmatrix}$$ //

(b) $n \to \infty$ の場合

$$\lim_{n\to\infty} 0.5^n \to 0$$

であるから

$$\boldsymbol{x}(\infty) = \boldsymbol{A}^\infty \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ //

4. (a) 行列式 = 固有値の積 $= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1\times2\times3 = 6$ //

(b) トレース = 固有値の和 $= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1+2+3 = 6$ //

5.
$$\mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{S}\Lambda_1\mathbb{S}^{-1})(\mathbb{S}\Lambda_2\mathbb{S}^{-1}) = \mathbb{S}\Lambda_1\Lambda_2\mathbb{S}^{-1}$$
$$= \mathbb{S}\Lambda_2\Lambda_1\mathbb{S}^{-1} = (\mathbb{S}\Lambda_2\mathbb{S}^{-1})(\mathbb{S}\Lambda_1\mathbb{S}^{-1}) = \mathbb{B}\mathbb{A} \ //$$

$\because$ Λ_1 と Λ_2 は対角行列であるから交換可能.

$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ の固有ベクトルを求める. 3角行列であるから,

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 2 & -1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore\ u_1 = v_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1+1 & 0 \\ 2 & -1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore\ \begin{matrix} u_2 = 0 \\ v_2 = 1 \end{matrix}$$

$\mathbb{B}$の固有値は適当に与える. 例えば, $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbb{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \mathbb{S}\Lambda\mathbb{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \ //$$

(検証)

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

等しい

$$\mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

6. 係数行列の固有値, 固有ベクトルを求める.

3角行列であるから

$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 2$

$$\lambda_1 = 1:\ \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore\ u_1 = v_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2:\ \begin{bmatrix} 1-2 & 0 \\ -1 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{cases} u_2 = 0 \\ v_2 = 1 \end{cases}$$

一般解は次式で与えられる.

$$\mathbf{u}(t) = (c_1 e^{\sqrt{1}t} + d_1 e^{-\sqrt{1}t})\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (c_2 e^{\sqrt{2}t} + d_2 e^{-\sqrt{2}t})\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \text{---(1)}$$

初期条件

$$\mathbf{u}(0) = (c_1 + d_1)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (c_2 + d_2)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{---(2)}$$

$$\left.\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \sqrt{1}(c_1 - d_1)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \sqrt{2}(c_2 - d_2)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \text{---(3)}$$

式(3)より　$c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$

式(2)より　$c_1 = d_1 = 1/2$, $c_2 = d_2 = -1/2$

これらを式(1)に代入する.

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{1}t} + e^{-\sqrt{1}t})\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t})\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad //$$

7. (a) $x^H A x$ はスカラーであるから, 実数であれば複素共役も等しい.

$$(x^H A x)^H = x^H A^H (x^H)^H = x^H A x$$

このように, 複素共役が元の値に等しいので $x^H A x$ は実数である. //

(b) $Ax = \lambda x$ の両辺に左から x^H を掛ける.

$$x^H A x = \lambda x^H x = \lambda \|x\|^2$$

これより,

$$\lambda = \frac{x^H A x}{\|x\|^2}$$

上式は分子, 分母共に実数であるから, λ も実数である. //

8.

(a) $\|x\| = \sqrt{|1+i|^2 + |1-i|^2} = \sqrt{4} = 2$

$\|y\| = \sqrt{1^2 + |i|^2} = \sqrt{2}$

(b) $x^H y = (1-i)1 + (1+i)i = 1 - i + i - 1 = 0$

$y^H x = (1+i)1 + (1-i)(-i) = 1 + i - i - 1 = 0$

9. $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $x_1^T x_2 = 0$ であるから, x_1, x_2 は正規直交系である. x_1, x_2 を A の固有ベクトルとすると,

$$A a = \lambda_1 x_1 x_1^T a + \lambda_2 x_2 x_2^T a \quad \text{--- (1)}$$

となる. さらに,

$$x_i x_i^T a = \frac{x_i x_i^T}{x_i^T x_i} a, \quad i = 1, 2$$

であるから, $x_i x_i^T a$ はベクトル a からベクトル x_i 上への射影である. 式(1)の右辺は a から x_1, x_2 上への射影を λ_1 倍, λ_2 倍していることに相当する. 題意より, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ とすることができる.
以上より, A は固有値が $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, 固有ベクトルが x_1, x_2 である行列である.

$$A = S \Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad //$$