線形代数学第２ー中間試験問題ー

情報システム工学科１年生　　　平成１９年度後期ー 2007.11.28 ー

1.　次の問いに答えよ．

(a) 直線 $y = 3x$ 上で，座標点 $(1,1)$ への距離が最小となる点の座標を求めよ．

(b) 平面 $x + 2y - z = 0$ 上で，座標点 $(1,1,0)$ への距離が最小となる点の座標を求めよ．

2.　次の行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ を求めよ．これが，対称行列となっていることを確かめよ．

(b) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の階数 r を求め，これらが等しいことを示せ．

(c) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の零空間が等しいことを確かめよ．

(d) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の逆行列は存在する／しないのいずれか．理由も述べよ．

(e) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在する条件を示せ．

(f) 上記の条件を満たす $\boldsymbol{A}$ の 3×2 行列の例を示し，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ．

3.　次の連立方程式の最適な最小２乗解を以下の問いに従って求めよ．

$$\begin{aligned} u + v &= 1 \\ v - w &= 0 \\ u + w &= 1 \\ -v + w &= -1 \end{aligned}$$

(a) 上の連立方程式を行列とベクトルを用いて表せ．これを，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ とする．

(b) 最小２乗解を求める方程式を求めよ．これを $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{b}} \cdots$ 　とする．

(c) 式　の一般解を求めよ．これが，最小２乗解である．

(d) $\hat{\boldsymbol{A}}$ の零空間を求めよ．次元と基底を求める．

(e) 式　の一般解を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{x}_n$ としたときの $\boldsymbol{x}_r$ を求めよ．但し，$\boldsymbol{x}_r$ は $\hat{\boldsymbol{A}}$ の行空間にある成分，$\boldsymbol{x}_n$ は零空間にある成分である．$\boldsymbol{x}_r$ が最適な最小２乗解である．

(f) $\boldsymbol{x}_r$ が式　を満たすことを示せ．

(g) $\boldsymbol{x}_r$ が零空間に直交することを示せ．

4. 線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1 = [1,-1,0]^T, \boldsymbol{a}_2 = [1,0,1]^T, \boldsymbol{a}_3 = [0,1,-1]^T$ を互いに直交するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に変換せよ（ベクトルの長さを１にする必要はない）．さらに，それらが互いに直交することを確かめよ．(参考）Gram-Schmidt の直交化法を利用する．

5. 次の行列式を求めよ．行列の性質 1〜10，または行列式の適当な公式を用いて計算する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 5 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

6.　行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を余因子行列と行列式を用いた次の公式により計算せよ．

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{adj\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$