線形代数学第２－期末試験問題－

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２１年度後期－ 2010.2.10 －

1. 実対称行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が $\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるとき，これらに対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ が直交することを示せ.

2. 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{x}_1 = [1,1]^T$，$\boldsymbol{x}_2 = [1,-1]^T$ を用いて，$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2$ と表されるとする．さらに，行列 $\boldsymbol{A}$ により，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{x}_1 - 2c_2\boldsymbol{x}_2$ になったとする．行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ.（ヒント）行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルと固有値を考える．$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$

3. 行列の固有値に関する以下の性質を証明せよ.
 (a) 行列のトレース（対角要素の和）は固有値の和に等しい.
 (b) 行列式は固有値の積に等しい.

4. 次の微分方程式を解け．また，この微分方程式の解は安定であるか，不安定であるか示せ.

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t), \qquad \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.　複素ベクトル $\boldsymbol{x} = [1-i, 1+i]^T$ と $\boldsymbol{y} = [i, 1-i]^T$ について，以下の問に答えよ.
 (a) 各々の長さ（ノルム）を求めよ（$\sqrt{\text{数値}}$ の形でもよい）.
 (b) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を求めよ.
 (c) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するか否かを示せ.

6. 実対称行列 $\boldsymbol{A}$ が負定値であるための必要十分条件は次のように表される.
　（１）$\boldsymbol{0}$ でない全てのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0$ である.
　（２）$\boldsymbol{A}$ の全ての固有値が負である：$\lambda_i < 0$.
　（３）部分行列 $\boldsymbol{A}_k$ の行列式は k の変化に対して交互に正負となる：例えば，$\det \boldsymbol{A}_k > 0$，$\det \boldsymbol{A}_{k-1} < 0$.
　（４）$\boldsymbol{A}$ の全てのピボットが負である:$d_k < 0$．但し，行の交換はないものとする.
　（５）$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W}$ となる正則行列 $\boldsymbol{W}$ が存在する.
 以下の問に答えよ.
 (a) （１）から（２）を証明せよ.
 (b) （１）,（２）から（３）を証明せよ.（ヒント）行列式は固有値の積に等しい.
 (c) （３）から（４）を証明せよ.（ヒント）行列式はピボットの積に等しい.
 (d) （２）から（５）を証明せよ.（ヒント）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$．また，$\boldsymbol{A}$ が実対称行列であり，固有ベクトルは正規直交系をなすため $\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}^T$ が成り立つ.
 (e) （５）から（１）を証明せよ.

7. 行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ が正定値であれば，$\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ も正定値であることを証明せよ.
　（ヒント）行列が正定値である性質 (1)～(5) に基づいて証明せよ.