線形代数学第１－中間試験問題－

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２２年度前期－ 2010.5.26 －

1. 次のベクトル，行列の計算を行え．計算が不可能な場合は「計算不可」と答えること．

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (b)\ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (e)\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (f)\ \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. 　次の連立方程式をガウスの前進消去と後退代入により解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. 次の行列を LDU に分解せよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 次の行列の逆行列を *Gauss-Jordan* 法により求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

5. 対角要素が 1 である下３角行列の逆行列は対角要素が 1 である下３角行列であることを次の例を用いて示せ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 3×3 行列 $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ とする．3 番目の行ベクトルが $\boldsymbol{a}_3 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ のように表されるとき，$\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去して得られる行列 $\boldsymbol{U}$ の 3 番目の行ベクトル $\boldsymbol{u}_3$ が零となることを証明せよ.（ヒント）ガウスの前進消去により，3 番目の行ベクトルは次のように変形される．$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{a}_3 - d_1\boldsymbol{a}_1 - d_2\boldsymbol{a}_2, u_{31} = 0, u_{32} = 0.$ u_{3i} は $\boldsymbol{u}_3$ の第 i 要素である．c_1，c_2 と d_1，d_2 の関係に着目する.

7. 行列 $\boldsymbol{A}$ を LDU に分解する方法は一通りであることを示せ．すなわち，もし $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{U}_1$ と $\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{U}_2$ に分解できたとすると，$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2$，$\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2$，$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$ が成り立つことを示せ.（ヒント）「対角要素が 1 である下 (上) ３角行列の逆行列は対角要素が 1 である下 (上) ３角行列である」,「対角要素が 1 である下 (上) ３角行列の積は対角要素が 1 である下 (上) ３角行列である」という性質を利用する.