平成22年度 前期

線形代数学第1 中間試験 2010.5.26

解答例

[1] (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\times1+(-1)\times2+(-3)\times(-1) = 3$ //

(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1) & 2\times5 \\ -1\times(-1) & -1\times5 \\ 3\times(-1) & 3\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$ //

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\times3, & -2-2\times(-1) \\ 0-2\times(-1), & 3-2\times0 \\ -2-2\times(-2), & 1-2\times3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} //$$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times0+1\times(-3), & 3\times2+1\times(-4), & 3\times(-1)+1\times1 \\ -1\times0+2\times(-3), & -1\times2+2\times(-4), & -1\times(-1)+2\times1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -6 & -10 & 3 \end{bmatrix} //$$

(e) 計算不可

(f) $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+3\times1 \\ -2+3\times3 \\ -3+3\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}$ //

[2]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ガウスの前進消去より,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

これより

$$-7w = -2 \qquad \therefore\ w = \frac{2}{7} /\!/$$

$$v + 4w = 1 \qquad v = 1 - 4w = \frac{7-8}{7} = -\frac{1}{7} /\!/$$

$$u - v + 2w = 1 \qquad u = 1 + v - 2w = \frac{7-1-4}{7} = \frac{2}{7} /\!/$$

[3]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ガウスの前進消去を行う.

第2行から第1行の−2倍を引く. ---(ア)

第3行から第1行の2倍を引く. ---(イ)

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad ----① $$

第3行から第2行の−1倍を引く. ---(ウ)

$$① \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad ---② $$

(ア)〜(ウ)より

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ---③ $$

② を対角行列と対角要素が1の上三角行列の積に分解する.

$$② = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{D}\mathbb{U} \quad \cdots ④$$

③, ④ より,

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad //$$

[4]

$$[\mathbb{A}\,|\,\mathbb{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore \mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad //$$

[5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

とする.

$$c_{11} = b_{11} = 1 \qquad c_{21} = a_{21}b_{11} + b_{21} = a_{21} + b_{21} = 0$$

$$c_{12} = b_{12} = 0 \qquad c_{22} = a_{21}b_{12} + b_{22} = b_{22} = 1$$

$$c_{13} = b_{13} = 0 \qquad c_{23} = a_{21}b_{13} + b_{23} = b_{23} = 0$$

$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + b_{31} = a_{31} + a_{32}b_{21} + b_{31} = 0$$
$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + b_{32} = a_{32} + b_{32} = 0$$
$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33} = a_{33} = 1$$

以上より,

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = 1$$
$$b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$$

となり,逆行列は対角要素が1の下3角行列となる.

[6] $\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - d_1\mathbf{a}_1 - d_2\mathbf{a}_2$ を次のように表す.

$$\begin{bmatrix} u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix} - d_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} - d_2 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$u_{31} = u_{32} = 0$ より,

$$\begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{--- ①}$$

一方,条件より,$\mathbf{a}_3 = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$ であるから,次式を得る.

$$\begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{--- ②}$$

①,②より,$d_1 = c_1$,$d_2 = c_2$ となる(注1)

c_1,c_2 は次式も満す.

$$a_{33} = c_1 a_{13} + c_2 a_{23}$$

これより,

$$u_{33} = a_{33} - d_1 a_{13} - d_2 a_{23}$$
$$= a_{33} - c_1 a_{13} - c_2 a_{23} = 0$$

$u_{31} = u_{32} = u_{33} = 0$ より,U の3番目の行ベクトルは零になる

(注1) ① より

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix}$$

が唯一の解を持つ（行列の逆行列が存在する）ことを仮定している．

[7]

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}_1 \mathbb{D}_1 \mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2 \mathbb{D}_2 \mathbb{U}_2 \quad \text{----} ①$$

とする．

①の両辺に左から $\mathbb{L}_1^{-1}$ を掛ける．

$$\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_1 \mathbb{D}_1 \mathbb{U}_1 = \mathbb{D}_1 \mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2 \mathbb{D}_2 \mathbb{U}_2 \quad \text{----} ②$$

上式で２番目の行列は上3角行列である．3番目の行列が上3角行列となるためには $\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2$ が対角行列であることが必要である．さらに(ヒント)より，$\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2$ の対角要素は１であるから，

$$\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2 = \mathbb{I} \quad \therefore \quad \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2 \quad //$$

② より $\mathbb{D}_1 \mathbb{U}_1 = \mathbb{D}_2 \mathbb{U}_2$

左から $\mathbb{U}_1^{-1}$ を掛ける．

$$\mathbb{D}_1 \mathbb{U}_1 \mathbb{U}_1^{-1} = \mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 \mathbb{U}_2 \mathbb{U}_1^{-1} \quad \text{---} ③$$

上式で２番目の行列は対角行列であり，3番目の行列が対角行列となるためには，$\mathbb{U}_2 \mathbb{U}_1^{-1}$ が対角行列であることが必要である．さらに（ヒント）より，$\mathbb{U}_2 \mathbb{U}_1^{-1}$ の対角要素は１であるから，

$$\mathbb{U}_2 \mathbb{U}_1^{-1} = \mathbb{I} \quad \therefore \quad \mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2 \quad //$$

③ より，$\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2$ //