# 線形代数学第２－期末試験問題－

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２２年度後期－ 2011.2.9 －

1. 固有値及び固有ベクトルに関する以下の文章において，空欄（ア）〜（ス）に該当する語句または式を下欄から選択し番号で答えよ．同じ番号が複数回選択される可能性もある．
「行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とするとき，$\boldsymbol{Ax}$ は $\boldsymbol{x}$ と（ア）が同じで，大きさは（イ）倍される．固有値と固有ベクトルは（ウ）を満たす．この式を（エ）のように書き換える．この式が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対して成り立つためには $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ が（オ）行列となることが必要である．このことを式で表すと（カ）となる．この式より（キ）を計算することができる．ある固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトルは（ク）より計算する．この式より求まる固有ベクトルは（ケ）解となり,（コ）に自由度がある．$\boldsymbol{A}$ が実対称行列であるとき，異なる固有値に対する固有ベクトルは（サ）する．$\boldsymbol{A}$ の対角要素の和（トレース）は固有値の（シ）に等しく，$\boldsymbol{A}$ の行列式は固有値の（ス）に等しい.」
（選択肢）(1) 大きさ，(2) 角度，(3) 固有値，(4) 固有ベクトル，(5) 積，(6) 和，(7) 正則，(8) 特異，(9) 線形独立，(10) 線形従属，(11) 直交，(12) 一意，(13) 不定，(14) 不能，(15)$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$，(16)$\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$，(17)$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

2. $\boldsymbol{A}$ の固有値が $\lambda$ で固有ベクトルが $\boldsymbol{x}$ であるとき，$\boldsymbol{A}^k$ の固有値が $\lambda^k$ で固有ベクトルは $\boldsymbol{x}$ であることを示せ．$k$ は整数である．$k > 0$ と $k < 0$ の場合を示すこと.

3. ベクトル $\boldsymbol{x} = [1, -1]^T$ に実対称行列 $\boldsymbol{A}$ を掛けたら $\boldsymbol{Ax} = [-1, 1]^T$ となった．また，$\det \boldsymbol{A} = -2$ である．$\boldsymbol{A}$ を求めよ.

4. ２次元ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = [x_1(n), x_2(n)]^T$ が次式により更新される。

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{Ax}(n), \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{x}(3)$ を求めよ。
(b) $n \to \infty$ としたとき，$\boldsymbol{x}(n)$ はどうなるか。

5. 次の微分方程式を解け.

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{u}(0)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. 零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax} < 0$ であるとき，$\boldsymbol{A}$ の全ての固有値が負となることを示せ．また，これら２つの条件が成り立つとき，$\boldsymbol{A}$ の左上の $k \times k$ 部分行列 $\boldsymbol{A}_k$ の行列式が交互に正負（例：$\det \boldsymbol{A}_{k-1} > 0$，$\det \boldsymbol{A}_k < 0$）となることを示せ.

7. $\boldsymbol{A}$ が正定値で，$\boldsymbol{B}$ が正則ならば，$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ も正定値であることを示せ.