線形代数学第二

平成22度後期　期末試験　問題＆解答例

電子情報学類１年生（１組）　2011.2.9

1. 固有値及び固有ベクトルに関する以下の文章において，空欄（ア）～（ス）に該当する語句または式を下欄から選択し番号で答えよ．同じ番号が複数回選択される可能性もある．[$2 \times 13 = 26$ 点]

「行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とするとき，$\boldsymbol{Ax}$ は $\boldsymbol{x}$ と（ア）が同じで，大きさは（イ）倍される．固有値と固有ベクトルは（ウ）を満たす．この式を（エ）のように書き換える．この式が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対して成り立つためには $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ が（オ）行列となることが必要である．このことを式で表すと（カ）となる．この式より（キ）を計算することができる．ある固有値 λ に対する固有ベクトルは（ク）より計算する．この式より求まる固有ベクトルは（ケ）解となり,（コ）に自由度がある．$\boldsymbol{A}$ が実対称行列であるとき，異なる固有値に対する固有ベクトルは（サ）する．$\boldsymbol{A}$ の対角要素の和（トレース）は固有値の（シ）に等しく，$\boldsymbol{A}$ の行列式は固有値の（ス）に等しい.」

（選択肢）(1) 大きさ，(2) 角度，(3) 固有値，(4) 固有ベクトル，(5) 積，(6) 和，(7) 正則，(8) 特異，(9) 線形独立，(10) 線形従属，(11) 直交，(12) 一意，(13) 不定，(14) 不能，(15)$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$，(16)$\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$，(17)$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

＜解答例＞

（ア）-(2),（イ）-(3),（ウ）-(16),（エ）-(17),（オ）-(8),（カ）-(15),（キ）-(3),（ク）-(17) または (16),（ケ）-(13),（コ）-(1),（サ）-(11),（シ）-(6),（ス）-(5).

2. $\boldsymbol{A}$ の固有値が λ で固有ベクトルが $\boldsymbol{x}$ であるとき，$\boldsymbol{A}^k$ の固有値が λ^k で固有ベクトルは $\boldsymbol{x}$ であることを示せ．k は整数である．$k > 0$ と $k < 0$ の場合を示すこと．[$5 \times 2 = 10$ 点]

＜解答例＞

固有値と固有ベクトルは次式を満たす.

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{1}$$

上式に左から $\boldsymbol{A}$ を掛ける．

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x} \tag{2}$$

これより，$k=2$ の場合が証明された．この操作を繰り返すことにより，$k>0$ の場合が証明できる．
次に，式 (1) に左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛ける．

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{3}$$

上式の両辺に λ^{-1} を掛けてから左右を入れ替えると次式を得る．

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x} \tag{4}$$

これにより，$k=-1$ の場合が証明された．これを繰り返すことにより，$k<0$ の場合が証明できる．

3. ベクトル $\boldsymbol{x} = [1,-1]^T$ に実対称行列 $\boldsymbol{A}$ を掛けたら $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = [-1,1]^T$ となった．また，$\det \boldsymbol{A} = -2$ である．$\boldsymbol{A}$ を求めよ．[10 点]

＜解答例＞

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{x}$ は次の関係を満たすので，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルであり，その固有値は $=-1$ である．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \tag{5}$$

一方，$\det \boldsymbol{A} = -2 =$ 固有値の積 であるから，もう一つの固有値は 2 となる．さらに，実対称行列において異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するため，固有値 2 に対する固有ベクトルとして $[1,1]^T$ を考えることができる．以上，$\boldsymbol{A}$ の全ての固有値と固有ベクトルが求まったので，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$ より $\boldsymbol{A}$ が求まる．但し，$\boldsymbol{S}$ は固有ベクトルを列ベクトルとする行列，$\boldsymbol{\Lambda}$ は

固有値を対角要素とする対角行列である．

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1} \tag{9}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

4. 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = [x_1(n), x_2(n)]^T$ が次式により更新される．

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n), \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{x}(3)$ を求めよ．[10 点]

＜解答例＞

$\boldsymbol{A}$ の固有値，固有ベクトルを求める．

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \tag{12}$$

より，固有値 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ が求まる．これらに対する固有ベクトルは

$\boldsymbol{x}_1 = [1, 1]^T$，$\boldsymbol{x}_2 = [1, -1]^T$ となる．これらより，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} &(13)\\ \boldsymbol{S}^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} &(14)\\ \boldsymbol{\Lambda} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} &(15)\\ & &(16) \end{aligned}$$

これらより，差分方程式の n 番目の解は

$$\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}_0 \tag{17}$$

で与えられる．上の結果を代入して計算すると次のようになる．

$$\boldsymbol{x}(n) = \frac{1}{2}3^n\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(-1)^n\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

これより，$\boldsymbol{x}(3)$ は次のように求まる．

$$\boldsymbol{x}(3) = \frac{1}{2}3^3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(-1)^3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \end{bmatrix} \tag{19}$$

(b) $n \to \infty$ としたとき，$\boldsymbol{x}(n)$ はどうなるか. [4 点]

＜解答例＞

上で求めた $\boldsymbol{x}(n)$ で $n \to \infty$ とする．3^n は $+\infty$ となり，$(-1)^n$ は 1 と -1 を繰り返す．従って，$\boldsymbol{x}(n)$ は $+\infty$ となる．

5. 次の微分方程式を解け. [20 点]

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{u}(0)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞平成 15 年度の解答例を参照.

6. 零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0$ であるとき，$\boldsymbol{A}$ の全ての固有値が負となることを示せ．また，これら 2 つの条件が成り立つとき，$\boldsymbol{A}$ の左上の $k \times k$ 部分行列 $\boldsymbol{A}_k$ の行列式が交互に正負（例：$\det \boldsymbol{A}_{k-1} > 0$，$\det \boldsymbol{A}_k < 0$）となることを示せ．[10 点]

＜解答例＞

$\boldsymbol{A}$ の固有値を λ_k，固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_k$ とすると次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k = \lambda_k \boldsymbol{x}_k \tag{20}$$

上式に左から $\boldsymbol{x}_k^T$ を掛ける．

$$\boldsymbol{x}_k^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k = \lambda_k \boldsymbol{x}_k^T\boldsymbol{x}_k \tag{21}$$

これを λ_k について解く．

$$\lambda_k = \frac{\boldsymbol{x}_k^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k}{\boldsymbol{x}_k^T\boldsymbol{x}_k} = \frac{\boldsymbol{x}_k^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k}{\parallel \boldsymbol{x}_k \parallel^2} \tag{22}$$

条件より分子は負であるから，固有値は負となる．
次に，零でないベクトルとして $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{0}]^T$ を考える．$\boldsymbol{x}_k$ は k 次元のベクトルである．この $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_k^T\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_k < 0 \tag{23}$$

となる．$\boldsymbol{A}_k$ は $\boldsymbol{A}$ の左上 $k \times k$ 行列である．上式，及び前半で得た結果より，$\boldsymbol{A}_k$ の固有値は負となる．
一方，行列式は固有値の積であるから，$\boldsymbol{A}_k$ の固有値を $\lambda_i^{(k)}$ とすると，

$$\det \boldsymbol{A}_k = \lambda_1^{(k)}\lambda_2^{(k)}\cdots\lambda_k^{(k)} \tag{24}$$

となる．従って，k が奇数の場合は $\det \boldsymbol{A}_k < 0$，$k$ が偶数の場合は $\det \boldsymbol{A}_k > 0$ である．

7. $\boldsymbol{A}$ が正定値で，$\boldsymbol{B}$ が正則ならば，$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ も正定値であることを示せ．[10 点]

＜解答例＞

$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ の 2 次形式を考える．$\boldsymbol{x}$ を零でないベクトルとする．

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \tag{25}$$

ここで，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ と置くと，上式は $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ となる．$\boldsymbol{A}$ は正定値であるから，零でないベクトルに対して $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} > 0$ となる．また，$\boldsymbol{B}$ が正則であるから，零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ も零とはならない．言い換えると $\boldsymbol{B}$ が正則であるとき，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす解は零ベクトルのみである．以上より，$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ も正定値となる．