線形代数学第２

平成22年度後期　中間試験　問題＆解答例

電子情報学類１年生（１組）　　2010.11.24

1. 曲線 $y = C + Dt^2$ で３点 $(t, y) = (0, 1), (1, 2), (2, 4)$ を近似するとき，誤差の二乗和を最小にするように C, D を求めよ．y，C，D，t はスカラーである．[8 点]

＜解答例＞

問題の条件を方程式の形式で表す.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

題意はこの方程式の最小二乗解を求めることである．この方程式を $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表したとき，最小二乗解は次式で与えられる.

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \tag{2}$$

具体的に計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{bmatrix} && (3) \\
(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1} &= \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} && (4) \\
(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T &= \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -3 \\ -5 & -2 & 7 \end{bmatrix} && (5) \\
\bar{\boldsymbol{x}} &= (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \\
&= \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -3 \\ -5 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 29 \\ 19 \end{bmatrix} && (6)
\end{aligned}$$

以上より，$(C,D)=(29/26,19/26)$ となる．

2. 以下の問に答えよ．

(a) 2 次元空間における直線 $y=2x$ 上で，座標 $(-1,2)$ に最も近い点（座標）を求めよ．[6 点]

＜解答例＞

直線 $y=2x$ 上のベクトルを $\boldsymbol{a}$ とし，座標 $(-1,2)$ に対応するベクトルを $\boldsymbol{b}$ とするとき，求める点（座標）は $\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ への射影となる．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} \tag{11}$$

上式においてベクトル $\boldsymbol{a}$ の決め方は一通りではない．しかし，射影 $\boldsymbol{p}$ は同じになる．以上より，求める座標は $(3/5,6/5)$ となる．

(b) 3 次元空間における平面 $x-y+z=0$ 上で，座標 $(1,1,1)$ に最も近い点（座標）を求めよ．[10 点]

＜解答例＞

求める座標はベクトル $\boldsymbol{b}=[1,1,1]^T$ からこの平面への射影である．平面を張るベクトルを $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ とし，これらのベクトルを列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{A}$ を考えると，上記の平面は $\boldsymbol{A}$ の列空間となる．ベクトル $\boldsymbol{b}$ から行列 $\boldsymbol{A}$ の列空間への射影は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \tag{12}$$

$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ は要素が $x-y+z=0$ を満たし，かつ，線形独立になるように決められる．自由度は 2 である．要するに，x と y は独立に決めることができ，z は x と y が決まれば自動的に決まる．簡単のために，$(x,y)=(1,0)$

と $(x,y)=(0,1)$ のように選ぶ．
上式の各項を具体的に計算する．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \\ 0 & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

以上より，求める座標は $(2/3, 4/3, 2/3)$ となる．

3. 以下の問に答えよ．[4 点× 4 問＝ 16 点]

(a) 線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1=[1,0,1]^T, \boldsymbol{a}_2=[0,1,1]^T, \boldsymbol{a}_3=[1,1,-1]^T$ を互いに直交するベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ に変換せよ．

＜解答例＞

Gram-Schmidt の直交化を行う.

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{v}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &- \frac{\begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

(b) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が互いに直交することを確かめよ.

＜解答例＞

内積が零となることを確かめる.

$$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 0 \tag{22}$$

$$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \tag{23}$$

$$\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \tag{24}$$

(c) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ をノルムが 1 であるベクトル $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ に変換せよ.

＜解答例＞

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ のノルムを求めて正規化を行う.

$$\| \boldsymbol{v}_1 \| = \sqrt{2} \qquad \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\| \boldsymbol{v}_2 \| = \sqrt{1/4+1+1/4} = \sqrt{3/2}$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} -1/2\sqrt{3/2} \\ 1/\sqrt{3/2} \\ 1/2\sqrt{3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\| \boldsymbol{v}_3 \| = \sqrt{3} \qquad \boldsymbol{q}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{27}$$

(d) $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ を列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{Q}$ を求め，ベクトル $\boldsymbol{x} = [1, 0, -1]$ に対して，$\| \boldsymbol{Qx} \| = \| \boldsymbol{x} \|$ となることを示せ.

＜解答例＞

行列 $\boldsymbol{Q}$ は次のようになる．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{28}$$

$\boldsymbol{Qx}$ を計算する．

$$\boldsymbol{Qx} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{29}$$

これより，

$$\| \boldsymbol{Qx} \| = \sqrt{(1/2 - 2/\sqrt{6} + 1/3) + 1/3 + (1/2 + 2/\sqrt{6} + 1/3)} = \sqrt{2} \tag{30}$$

一方，$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{2}$ であり，$\| \boldsymbol{Qx} \| = \| \boldsymbol{x} \|$ となる．

4. 行列式の定義 (1)〜(3) に基づいて，行列の性質 (a)〜(d) を証明せよ．[5 点 × 4 問＝ 20 点]

＜行列式の定義＞

(1) 行列式は行列の要素の積の和である．

(2) 一つの積は，行列の全ての行及び列から 1 個の要素を選択して構成される．

(3) 積には符号が付けられる．σ 番目の積の符号を $sign(\sigma)$ と表す．この積を $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ と表したとき，$\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)]$ を奇数回の入れ替えで $[1, 2, \cdots, n]$ に変換できる場合は $sign(\sigma) = -1$，偶数回の場合は $sign(\sigma) = 1$ である．

＜行列式の性質＞

(a) 行列式は一つの行に関して線形である．

＜解答例＞

行列 $\boldsymbol{A}$ の第 i 行 $[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$ に着目する．行列式の定義 (1)，(2) より，積の項は第 i 行の要素 a_{ij} を必ず 1 個含む．従って，$\boldsymbol{A}$ の行列式は次のように表される．

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} \tag{31}$$

α_{ij} には第 i 行の要素は含まれない．(注意：α_{ij} は余因子に相当するが，ここでは「第 i 行の要素を含まない項」という表現でよい)

a_{ij} を $ca_{ij}+db_{ij}$ で置き換えた行列を $\boldsymbol{C}$ とする．c，d は定数である．(参考：テキスト通りに，$a_{ij}+tb_{ij}$ に置き換えてもよい)．

上式の関係より，

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{C} &= (ca_{i1}+db_{i1})\alpha_{i1}+(ca_{i2}+db_{i2})\alpha_{i2}+\cdots \\ &+ (ca_{in}+db_{in})\alpha_{in} \qquad (32)\\ &= ca_{i1}\alpha_{i1}+ca_{i2}\alpha_{i2}+\cdots+ca_{in}\alpha_{in} \\ &+ db_{i1}\alpha_{i1}+db_{i2}\alpha_{i2}+\cdots+db_{in}\alpha_{in} \qquad (33)\\ &= c(a_{i1}\alpha_{i1}+a_{i2}\alpha_{i2}+\cdots+a_{in}\alpha_{in}) \\ &+ d(b_{i1}\alpha_{i1}+b_{i2}\alpha_{i2}+\cdots+b_{in}\alpha_{in}) \qquad (34)\\ &= c\det\boldsymbol{A}+d\det\boldsymbol{B} \qquad (35)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ の第 i 行を b_{ij} で置き換えた行列である．上式より，$\boldsymbol{A}$ の第 i 行に関して行列式の線形性が成り立つことが分かる．

(b) 対角行列の行列式は対角要素の積である．

＜解答例＞

行列式の定義 (2) より，積の項は行列の全ての行及び列から 1 個の要素を選択して構成される．対角行列では，各行，各列に含まれる要素は対角要素のみであるから，対角要素から成る積の項が 1 個のみとなる．

(c) 行を入れ替えると行列式の符号（正負）が変わる．

＜解答例＞

行列式の定義 (3) より，σ 番目の積を $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ と表したとき，$\sigma=[\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)]$ を奇数回の入れ替えで $[1,2,\cdots,n]$ に変換できる場合は積の符号は－，偶数回の場合は＋である．行列 $\boldsymbol{A}$ において，第 i 行と第 j 行を入れ替えることは，積 $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ において，$a_{i,\sigma(i)}$ と $a_{j,\sigma(j)}$ を入れ替えることに相当する．すなわち，$\sigma=[\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)]$ において i 番目と j 番目の要素を入れ替えることに相当するため，符号 (正負) が変わる．

(d) 零の行（一つの行の要素が全て零）を含む行列の行列式は零である．

<解答例>

(a) の証明で示したように，行列式は次のように表される．

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} \tag{36}$$

第 i 行の全ての要素が零であるとすると，上式より $\det \boldsymbol{A} = 0$ となることが分かる．

5. 4×4 行列の行列式を要素の積（＝項）に展開すると何個の項があるか．[4 点] また，$a_{13} = 0$ とすると何個の項が減少するか．[4 点]

<解答例>

行列式では各行，各列から 1 個の要素を選択して積を構成する．第 1 行から要素を選択する自由度は 4 である．第 1 行から既に 1 個の要素を選択したとすると，第 2 行から要素を選択する自由度は 3 である．第 1 行，第 2 行から各々1 個の要素を選択したとすると，第 3 行から要素を選択する自由度は 2 である．第 1 行，第 2 行，第 3 行から各々1 個の要素を選択したとすると，第 4 行から要素を選択する自由度は 1 である．以上より，積の項数は $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 個である．

次に，$a_{13} = 0$ であるとする．a_{13} を含む積の数を考える．上と同様に考えられるが，第 1 行からは a_{13} のみが選択されるので，積の項数は $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ 個である．すなわち，$a_{13} = 0$ とすることにより，6 個の項が減少する．

6. 行列 $\boldsymbol{A}$ は各行の要素の和が零であるとき，$\det \boldsymbol{A} = 0$ となることを示せ.（ヒント）$\boldsymbol{x} = [1, 1, \cdots, 1]^T$ に対する $\boldsymbol{Ax}$ がどのように表されるか考える．[8 点]

<解答例>

$\boldsymbol{A}$ を $n \times n$ 行列であるとする．ヒントより，全ての要素が 1 であるベクトル $\boldsymbol{x} = [1, 1, \cdots, 1]^T$ を考え，$\boldsymbol{Ax}$ を計算してみる．

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

すなわち，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ が成り立つから，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{A}$ の零空間のベクトルである．零でないベクトルを含む零空間の次元は 1 次元以上である．$\boldsymbol{A}$ の階数を r と

すると，零空間の次元$=n-r>0$であるから，行列 $\boldsymbol{A}$ は特異行列となり，その行列式は零である．

7. 行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ の行列式を求めよ．行列の性質 1～10，または行列式の適当な公式を用いて計算する．[4 点× 4 問＝ 16 点]
＜解答例＞

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

第 1 行=ー第 3 行の関係があり，行ベクトルが線形従属である．従って，$\det\boldsymbol{A}=0$ となる．

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

余因子展開する．

$$\begin{aligned} \det\boldsymbol{B} &= 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+2}2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1(-1)^{1+2}2(-1)^{1+2}(-2+2)=0 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

下 3 角行列であるから，行列式は対角要素の積である．

$$\det\boldsymbol{C}=2\times3\times(-1)\times(-1)=6 \tag{42}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

ガウスの前進消去を行う.

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{D} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-1) \times (-3) \times 7 = 21 \end{aligned} \tag{44}$$

8. 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を $adj\boldsymbol{A}/det\boldsymbol{A}$ により求めよ [8 点].

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{45}$$

＜解答例＞

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{adj\,\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{31} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{32} \\ \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{33} \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 \times (-2) = -2 \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 && (48)\\
\boldsymbol{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 && (49)\\
\boldsymbol{A}_{13} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 && (50)\\
\boldsymbol{A}_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 && (51)\\
\boldsymbol{A}_{22} &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 && (52)\\
\boldsymbol{A}_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 && (53)\\
\boldsymbol{A}_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 && (54)\\
\boldsymbol{A}_{32} &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 && (55)\\
\boldsymbol{A}_{33} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 && (56)
\end{aligned}$$

以上より,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ -7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \tag{57}$$