線形代数学第１－中間試験問題＜解答例＞

電子情報学類１年生（１組）　　平成２３年度前期－ 2011.5.25 －

1. 次のベクトル，行列の計算を行え．計算が不可能な場合は「計算不可」と答えること．
＜解答例＞配点：3 点× 6 問=18 点

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 - 12 = -10 \tag{1}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$(c) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{計算不可} \tag{3}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -6 & -10 & 3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$(f) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{計算不可} \tag{6}$$

2.　次の連立方程式をガウスの前進消去と後退代入により解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

＜解答例＞配点：15 点

上の方程式においてガウスの前進消去を行う．第 1 行の 2 倍を第 2 行から引き，第 1 行の-1 倍（1 倍）を第 3 行から引く（に加える）.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

第 2 行の-2/5 倍（2/5 倍）を第 3 行から引く（に加える）.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 11/5 \end{bmatrix} \tag{9}$$

次に，後退代入により $w \to v \to u$ の順に解を求める.

$$\frac{4}{5}w = \frac{11}{5} \tag{10}$$

$$w = \frac{11}{4} \tag{11}$$

$$-5v + 2w = -2 \tag{12}$$

$$-5v + 2\frac{11}{4} = -2 \tag{13}$$

$$v = \frac{3}{2} \tag{14}$$

$$u + 2v - w = 1 \tag{15}$$

$$u + 3 - \frac{11}{4} = 1 \tag{16}$$

$$u = \frac{3}{4} \tag{17}$$

3. 次の行列を LDU に分解せよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

＜解答例＞配点：15 点

$\boldsymbol{A}$ においてガウスの前進消去を行う．先ず，第 1 行の-2 倍（1 倍）を第 2 行（第 3 行）から引く．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

次に，第 2 行の 2 倍を第 3 行から引く．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

これにより，$\boldsymbol{L}$ が次のように求まる．

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

次に，ガウスの前進消去により求まった行列を次のように分解する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{DU} \tag{22}$$

以上より，

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

4. 次の行列の逆行列を *Gauss-Jordan* 法により求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

＜解答例＞配点：17 点

行列 $\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去，後退代入，正規化により単位行列に変換する

計算と同じ計算を単位行列について行う．先ず，第 1 行の 2 倍（1 倍）を第 2 行（第 3 行）に加える．

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

次に，第 2 行の 1 倍を第 3 行に加える．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

次に後退代入により左上を零にする．第 3 行の 4/7 倍（2/7 倍）を第 2 行（第 1 行）から引く．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/7 & -2/7 & -2/7 \\ 0 & -1 & 0 & 2/7 & 3/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

正規化により，左半分を単位行列にする．第 2 行を-1 倍，第 3 行を 1/7 倍する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/7 & -2/7 & -2/7 \\ 0 & 1 & 0 & -2/7 & -3/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix} \tag{28}$$

上式の右半分が $\boldsymbol{A}$ の逆行列になる．

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & -2/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 4/7 \\ 3/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix} \tag{29}$$

5. 行列 $\boldsymbol{A}$ においてガウスの前進消去を行って得られる行列を $\boldsymbol{U}$ とする．$\boldsymbol{U}$ において零の行が生じるとき，$\boldsymbol{A}$ の行ベクトルの間にはどのような関係があるか示せ（$\boldsymbol{A}$ の行ベクトルを $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ とし，これらの間にどのような関

係があるかを示す．結果のみでよい）
また，そのような行列 $\boldsymbol{A}$ の例（3×3 行列）を示し，ガウスの前進消去を行い，行列 $\boldsymbol{U}$ において零の行が生じることを示せ．
＜解答例＞配点：15 点
$\boldsymbol{U}$ において零の行が生じるとき，$\boldsymbol{A}$ の行ベクトルの間には一般に次の関係がある．

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \tag{30}$$

但し，少なくとも 1 個の c_i が零ではない．
次に，一例を示す．$\boldsymbol{A}$ の行ベクトルの間に次の関係があるとする．

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \tag{31}$$

上の関係を満たす $\boldsymbol{A}$ の一例を示す．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

ガウスの前進消去を行う．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U} \end{aligned}$$

(34)

このように，$\boldsymbol{U}$ において零の行が生じることが示された．

6. 式 (a) で与えられる行列 $\boldsymbol{E}_{ij}$ の逆行列が式 (b) となることを示せ。但し，$i \neq j$ であり，$\boldsymbol{Z}_{ij}$ は第 i 行第 j 列の要素 z_{ij} のみが非零であり，他の要素は全て零であるとする。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{ij} &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z}_{ij} && (a) \\ \boldsymbol{E}_{ij}^{-1} &= \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}_{ij} && (b) \end{aligned}$$

<解答例>配点：10 点
$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{I}$ となることを示す.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} &= (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Z}_{ij})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_{ij}) \\ &= \boldsymbol{I}+\boldsymbol{Z}_{ij}-\boldsymbol{Z}_{ij}-\boldsymbol{Z}_{ij}\boldsymbol{Z}_{ij} \end{aligned} \tag{35}$$

次に，$\boldsymbol{Z}_{ij}\boldsymbol{Z}_{ij} = \boldsymbol{0}$ となることを示す．$\boldsymbol{Z}_{ij}$ は第 i 行第 j 列のみに非零要素を持つ．従って，$\boldsymbol{Z}_{ij}\boldsymbol{Z}_{ij}$ において，左側の行列の第 i 行 $[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$ と，右側の行列の第 j 列 $[a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}]^T$ の掛け算（内積）においてのみ，双方が非零要素を含む．この内積は次のようになる．

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = a_{ij}a_{jj} + a_{ii}a_{ij} = 0 \tag{36}$$

第 i 行の a_{ij} に掛けられる第 j 列の要素は a_{jj} であり，第 j 列の a_{ij} に掛けられる第 i 行の要素は a_{ii} である．$a_{ii} = a_{jj} = 0$ であるから，内積は零となる．従って，$\boldsymbol{Z}_{ij}\boldsymbol{Z}_{ij} = \boldsymbol{0}$ となる．
以上より，$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{I}$ が示された.

7. $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の全ての要素が零でないとする．このとき，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の例（2×2 行列）を求めよ．但し，$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ とする.
<解答例>配点：10 点

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{37}$$

より

$$ae+bg = 0 \tag{38}$$
$$af+bh = 0 \tag{39}$$
$$ce+dg = 0 \tag{40}$$
$$cf+dh = 0$$

$$(42)$$

ここで，例えば

$$a = b = 1 \tag{43}$$

とする．式 (38)，(39) より

$$e + g = 0 \tag{44}$$
$$f + h = 0 \tag{45}$$

例えば

$$e = 1, \qquad g = -1 \tag{46}$$
$$f = 1, \qquad h = -1 \tag{47}$$

とする．式 (40)，(41) より

$$c - d = 0 \tag{48}$$

例えば

$$c = d = 1 \tag{49}$$

とする．これらより，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{50}$$

他に次のような解がある．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{53}$$