平成26年度前期
電子情報工学科（4年生）

情報理論

中間試験
（問題と配点/解答例）

2014．6．11

教科書，資料等の持ち込み不可．
電卓使用可

問題1（10点）
中が見えない壺に同じ形状の2種類の色の玉（赤玉3個，白玉5個）が入っている．この壺から1個ずつ順に合計3個の玉を取り出すとき，2種類の色が交互に出てくる確率を求めよ．

＜解答例＞
取り出し方は，「赤→白→赤」と「白→赤→白」の2通り
「赤→白→赤」の確率

$$P_1 = \frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6} = \frac{5}{56} = 0.08928\ (8.93\%)$$

「白→赤→白」の確率

$$P_2 = \frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6} = \frac{5}{28} = 0.1785\ (17.9\%)$$

全体の確率

$$P = P_1 + P_2 = \frac{15}{56} = 0.2679\ (26.8\%)$$

問題2（10点）

ある壺の中に赤玉が4個，青玉が2個，白玉が2個入っている．この壺から1個の玉を取り出すときのエントロピー（平均情報量）を求めよ．

＜解答例＞
赤玉を取り出す確率　$p_1 = 4/8 = 0.5$
青玉を取り出す確率　$p_2 = 2/8 = 0.25$
白玉を取り出す確率　$p_3 = 2/8 = 0.25$

エントロピー

$$H = \sum_{i=1}^{3} -p_i \log_2 p_i = 1.5\ [bit]$$

問題3（10点）
二つのサイコロを振ったとき，その目の和が6であり，サイコロの目も分かっていた．後日，そのサイコロの目を忘れてしまった．このとき失われた情報量（ビット）を求めよ．

＜解答例＞
①目の和が6であり，目の組み合わせも分かっている（1通りである）事象
確率：$p_1 = 1/36$
自己情報量：$I_1 = -\log_2 p_1 = 5.17 [bit]$
②目の和が6であり，目の組み合わせが不明である事象
目の和が6の組み合わせ＝(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)
確率：$p_1 = 5/36$
自己情報量：$I_2 = -\log_2 p_2 = 2.85 [bit]$
③失われた情報量：　$I = I_1 - I_2 = 2.32\ [bit]$

問題4（5点×3＝15点）
二つの正常なサイコロを同時に振る場合を考える．二つのサイコロの目の和を表す確率変数をX，二つのサイコロの目の組合せが{奇数，奇数}，{奇数，偶数}，{偶数，偶数}のいずれかを表す確率変数をYとする．
（1）Xのエントロピー$H(X)$を求めよ．
目の和に対する組み合わせ

目の和	組み合わせ
2.	1＋1（1）
3.	1＋2，2＋1（2）
4.	1＋3，2＋2，3＋1（3）
5.	1＋4，2＋3，3＋2 4＋1（4）
6.	1＋5，2＋4，3＋3 4＋2，5＋1（5）
7.	1＋6，2＋5，3＋4，4＋3，5＋2，6＋1（6）
8.	2＋6，3＋5，4＋4，5＋3，6＋2（5）
9.	3＋6，4＋5，5＋4，6＋3（4）
10.	4＋6，5＋5，6＋4（3）
11.	5＋6，6＋5（2）
12.	6＋6（1）

目の和とその確率

$$2(1) \to p_2 = \frac{1}{36},\ 3(2) \to p_3 = \frac{2}{36},\ 4(3) \to p_4 = \frac{3}{36}$$

$$5(4) \to p_5 = \frac{4}{36},\ 6(5) \to p_6 = \frac{5}{36},\ 7(6) \to p_7 = \frac{6}{36}$$

$$8(5) \to p_8 = \frac{5}{36},\ 9(4) \to p_9 = \frac{4}{36},\quad 10(3) \to p_{10} = \frac{3}{36}$$

$$11(2) \to p_{11} = \frac{2}{36},\ 12(1) \to p_{12} = \frac{1}{36}$$

Xのエントロピー

$$H(X) = \sum_{i=2}^{12} -p_i \log_2 p_i = 3.27\ [bit]$$

（2）条件付きエントロピー$H(X|Y)$を求めよ.

$Y_1 =$（奇数，奇数）

	1	3	5
1	2	4	6
3	4	6	8
5	6	8	10

Y_1は上記の9通り

$p(Y_1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

和（組合せの数）
2（1），4（2），6（3）
8（2），10（1）
和に対する確率
1／9，2／9，3／9
2／9，1／9

$Y_2 =$（奇数，偶数）

	1	3	5
2	3	5	7
4	5	7	9
6	7	9	11

Y_2は上記の9通り＋
奇数･偶数入替あり

$p(Y_2) = \frac{9 \times 2}{36} = \frac{1}{2}$

和（組合せの数）
3（1），5（2），7（3）
9（2），11（1）
和に対する確率
1／9，2／9，3／9
2／9，1／9

$Y_3 =$（偶数，偶数）

	2	4	6
2	4	6	8
4	6	8	10
6	8	10	12

Y_3は上記の9通り

$p(Y_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

和（組合せの数）
4（1），6（2），8（3），
10（2），12（1）
和に対する確率
1／9，2／9，3／9
2／9，1／9

以上の値を条件付きエントロピーの式に代入する

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{3} p(Y_i) \sum_{j=1}^{5} p(X_{ij}|Y_i)\log_2 p(X_{ij}|Y_i)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\log_2\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\log_2\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\log_2\frac{3}{9} + \frac{2}{9}\log_2\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\log_2\frac{1}{9}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\log_2\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\log_2\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\log_2\frac{3}{9} + \frac{2}{9}\log_2\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\log_2\frac{1}{9}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\log_2\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\log_2\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\log_2\frac{3}{9} + \frac{2}{9}\log_2\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\log_2\frac{1}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)2.197 = 2.197 \to 2.20[bit]$$

（3）相互情報量$I(X;Y)$を求めよ.

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$
$$= 3.274 - 2.197 = 1.077 \to 1.08\ [bit]$$

問題5（5点×3＝15点）

記号0,1の系列を発生する2重マルコフ情報源の状態遷移確率が次のように与えられている. 以下の問に答えよ.
（1）状態遷移図を図示せよ.

$$p(0|00) = \frac{1}{3}, \qquad p(1|00) = \frac{2}{3}$$
$$p(0|01) = \frac{1}{2}, \qquad p(1|01) = \frac{1}{2}$$
$$p(0|10) = \frac{3}{4}, \qquad p(1|10) = \frac{1}{4}$$
$$p(0|11) = \frac{2}{3}, \qquad p(1|11) = \frac{1}{3}$$

（2）各状態の定常確率 $P(00), P(01), P(10), P(11)$ を求めよ
（3）情報源のエントロピーを求めよ.

（2）定常確率を求める方程式

$$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1 \cdots (1)$$
$$P(00) = \frac{1}{3}P(00) + \frac{3}{4}P(10) \cdots (2)$$
$$P(01) = \frac{2}{3}P(00) + \frac{1}{4}P(10) \cdots (3)$$
$$P(10) = \frac{1}{2}P(01) + \frac{2}{3}P(11) \cdots (4)$$
$$P(11) = \frac{1}{2}P(01) + \frac{1}{3}P(11) \cdots (5)$$

式（1）と式（2）～（5）の内の3つの方程式を連立させて解く. 結果は次のようになる.

$$P(00) = \frac{9}{31}, P(01) = \frac{8}{31}, P(10) = \frac{8}{31}, P(11) = \frac{6}{31}$$

（3）情報源のエントロピー

$$H(S) = H(1/3)P(00) + H(1/2)P(01) + H(1/4)P(10)$$
$$+ H(1/3)\ P(11)$$
$$= 0.9183 \times \frac{9}{31} + 1 \times \frac{8}{31} + 0.8113 \times \frac{8}{31} + 0.9183 \times \frac{6}{31}$$
$$= 0.9118 \to 0.912\ [bit]$$

問題6（10点）
$a_1 = 0, a_2 = 1$の生起確率が$p_1 = 1/4, p_2 = 3/4$である2元対称通信路において，誤り率が$\varepsilon = 1/8$であるときの伝送情報量を求めよ．

$$v = p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon)$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \times \frac{7}{8} = 0.6875$$

伝送情報量

$$I(A;B) = H(v) - H(\varepsilon)$$
$$= H(0.6875) - H(0.125)$$
$$= 0.8960 - 0.5436 = 0.3524 \rightarrow 0.352\ [bit]$$

（参考）エントロピー関数の値は下記のグラフから読み取るか，
電卓で計算すること．