情報数学

中山クラス

第１回小テスト予想問題
解答例

質問がある場合は
nakayama@t.kanazawa-u.ac.jp
までメールしてください.
PC，携帯，スマホなど，何からでもOKです.

問題１（pp.23，定理2.12）
次式において，x^7の係数を求めよ.

$$(1+x)^{10}$$

＜解答例＞
二項定理よりx^7の係数は ${}_{10}C_7$である.

$${}_{10}C_7=\frac{10!}{(10-7)!\,7!}=\frac{10!}{3!\,7!}=120$$

問題２（p.25，定理2.13）
次の値を求めよ．但し，答えは指数（べき乗）の形で良い.

$${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5$$

＜解答例＞
定理2.13において，$n=5$の場合に相当する.

$${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2^5=32$$

問題３（p.25）
5個の異なる物から0個，２個，4個取り出す組合せの総和と1個，3個，5個取り出す組合せの総和を求め，それらが等しいことを示せ.

＜解答例＞
前者$={}_5C_0+{}_5C_2+{}_5C_4=1+10+5=16$
後者$={}_5C_1+{}_5C_3+{}_5C_5=5+10+1=16$
以上より，前者＝後者が成り立つ.

問題４（p.26-定理2.15，p.27-例2.12）
赤いボール3個，青いボール4個，黄色いボール2個を全て並べる順列の数を求めよ.

＜解答例＞
定理2.15の条件と同じであるから，

$$\binom{9}{3,4,2}=\frac{9!}{3!\,4!\,2!}=1260$$

問題5（p.28，例2.13）
赤いボール3個，青いボール2個，黄色いボール1個から5個選んで作る順列の数を求めよ.

＜解答例＞
全てのボールを使用しない場合であり，5個の構成を分けて定理2.15を適用する.
＜5個の構成＞
①赤3個＋青2個
②赤3個＋青1個＋黄色1個
③赤2個＋青2個＋黄色1個

$$①+②+③=\binom{5}{3,2}+\binom{5}{3,1,1}+\binom{5}{2,2,1}$$
$$=\frac{5!}{3!\,2!}+\frac{5!}{3!\,1!\,1!}+\frac{5!}{2!\,2!\,1!}=10+20+30=60$$

問題6（p.28，系2.1）

赤いボール4個，青いボール3個，黄色いボール2個を9個の異なる箱にそれぞれ1個ずつ入れる方法は何通りあるか.

＜解答例＞
系2.1の条件と同じである.
$n_1=4, n_2=3, n_3=2$
$n=n_1+n_2+n_3=9$に相当する.

$$\binom{9}{4,3,2}=\frac{9!}{4!\,3!\,2!}=1260$$

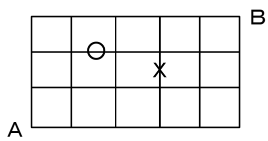
問題7（pp.30-31，例2.15）
$(1+x+x^3+x^5)^4$を展開して出来る多項式において，x^8の係数を求めよ.

＜解答例1＞
x^8の構成（方針：低次の項を多く使用→高次の項を使用）
①$x\times x\times x\times x^5$ → ${}_4C_3\times{}_1C_1=4$
②$x\times x\times x^3\times x^3$ → ${}_4C_2\times{}_2C_2=6$
③$x^3\times x^5\times 1\times 1$ → ${}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_2=12$
x^8の係数$=4+6+12=22$

＜解答例2＞
$v=x, w=x^3, y=x^5, z=1$とおく.
①v^3y^1の係数$=\binom{4}{3,1}=\frac{4!}{3!1!}=4$
②v^2w^2 の係数$=\binom{4}{2,2}=\frac{4!}{2!2!}=6$
③$w^1y^1z^2$の係数$=\binom{4}{1,1,2}=\frac{4!}{1!1!2!}=12$
x^8の係数$=4+6+12=22$

問題8（pp.10-11，例2.9）
次の図は道路マップを表している．進む方向は右方向（→）と上方向（↑）のみである．以下の問に答えよ．
（1）A点からB点に行く経路は何通りあるか．
（2）X印の道路を通らない場合は何通りになるか．
（3）〇印の道路を必ず通る場合は何通りになるか．
＜解答例＞
（1）右方向→が5個，上方向↑が3個の合計8個ある．
　（例）→↑→→↑→→↑
A点からB点に行く経路の総数は8個の位置（順番）から3（5）個を選んで↑（→）に割り当てる組合せの数に等しい．

$_8C_3 = {}_8C_5 = 56$通り



（2）X印の道を必ず通る経路の数を求め，これを総数より差し引く．
A点→X印の間には右向き→が3個，上向き↑が1個入る．X印→B点の間には右向き→が2個，上向き↑が1個入る．
①（A点→X印の道）の経路の数＝4個の位置（順番）から1（3）個選んで↑（→）に割り当てる組合せの数$= {}_4C_1 = {}_4C_3 = 4$
②（X印の道→B点）の経路の数＝3個の位置（順番）から1（2）個を選んで↑（→）に割り当てる場合の数$= {}_3C_1 = {}_3C_2 = 3$
③X印の道を必ず通る経路の数＝①×②$= 4 \times 3 = 12$
X印の道を通らない経路の数＝総数－③$= 56 - 12 = 44$通り

（3）上記の③を求める方法と同じである．
A点→〇印の間には右向き→が1個，上向き↑が2個入る．〇印→B点の間には右向き→が3個，上向き↑が1個入る．
①（A点→〇印の道）の経路の数＝3個の位置（順番）から2（1）個選んで↑（→）に割り当てる組合せの数$= {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$
②（〇印の道→B点）の経路の数＝4個の位置（順番）から1（3）個を選んで↑（→）に割り当てる場合の数$= {}_4C_1 = {}_4C_3 = 4$
③〇印の道を必ず通る経路の数＝①×②$= 3 \times 4 = 12$通り

問題9（p.6）
男子4人と女子2人を1列に並べるとき，次の問に答えよ．
（1）全部の並べ方は何通りあるか．
（2）女子2人が隣り合う並べ方は何通りあるか．
（3）女子2人が隣り合わない並べ方は何通りあるか．

＜解答例＞
（1）異なる6人から6人を選んで作る順列の数に等しい．

$_6P_6 = 6! = 720$通り

（2）女子2人をまとめて1組とする．
男子4人＋女子1組みの順列＝（異なる5人から5人を選んで作る順列の数）×（女子2人の順列の数）

$_5P_5 \times {}_2P_2 = 5! \times 2! = 240$通り

（3）（1）の結果－（2）の結果として求まる．

$720 - 240 = 480$通り

問題１０（pp.20-21）
3種類の菓子で合計8個入りの菓子折りを作る．
（1）何通りの作り方があるか．
（2）3種類から少なくとも1個は入れるとすると，何通りになるか．

＜解答例＞
（1）3種類の異なる物から重複を許して8個取って作る組合せの数に等しい．

$$_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$$

（2）条件を満たすために，3種類の菓子から1個ずつ選んで菓子折に入れる．そうすると，問題は次のようになる「3種類の異なる物から重複を許して5個取って作る組合せの数」

$$_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = \frac{7!}{2!\,5!} = 21$$

問題１１（pp.20-21）
3つの変数からなる次の１次方程式を考える．

$$x + y + z = 6$$

（1）負でない整数解の組は何通りあるか．
（解の例）$x = 1, y = 3, z = 2$，$x = 0, y = 5, z = 1$
（2）正の整数解は何通りあるか．（解として0は含まない）
＜解答例＞
（1）$x = 1, y = 3, z = 2$はxを1個，yを3個，zを2個選んだと考える．$x = 0, y = 5, z = 1$も同様にxを0個，yを5個，zを1個選んだと考える⇒負でない整数解の組の数＝3種類の異なる物から重複を許して6個とる組合せの数

$$_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$$

（2）重複組合せは0個選ぶことも可能なので，まず，3種類x, y, zから1個ずつ選ぶ．そうすると，求めるべきものは「3種類の異なる物から重複を許して3個とる組合せの数」となる．

$$_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

問題１２（p.32）
異なる物を異なる箱に入れる問題において，各箱に入れる物を高々1個に制限する場合，以下の問に答えよ．
（1）3個の異なる物を5個の異なる箱に入れる場合，
　　何通りの方法があるか．
（2）5個の異なる物を3個の異なる箱に入れる場合，
　　何通りの方法があるか．

＜解答例＞
p.32の「1．の問題で各箱に入れる物をたかだか1個に制限する場合」に該当する．
（1）箱の数$n = 5 >$ 物の数$r = 3$であるから

$_nP_r = {}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$通り

（2）箱の数$n = 3 <$ 物の数$r = 5$であるから

$_rP_n = {}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$通り

問題13（p.33）
異なる5個の物を異なる3個の箱に入れる問題において，各箱に入れる物の数を制限しない場合，以下の問に答えよ.
（1）箱内の物の順序を考えない場合，何通りの方法があるか.
（2）箱内の物の順序を考える場合，何通りの方法があるか.

＜解答例＞
（1）p.33の「1. の問題で各箱に入れる物の数を制限せず，箱内での物の順番を考えない場合」に該当する.

$$ {}_{n}\Pi_{r} = {}_{3}\Pi_{5} = 3^5 = 243 $$

（2）p.33の「1. の問題で各箱に入れる物の数を制限せず，箱内での物の順番を考える場合」に該当する.

$$ \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} = \frac{(3+5-1)!}{(3-1)!} = \frac{7!}{2!} = 2520 $$

問題14（pp.34-35）
同じ種類の5個の物を異なる3個の箱に入れる問題において，以下の問に答えよ.
（1）各箱に入れる物を高々1個に制限する場合，何通りあるか.
（2）各箱に入れる物の数を制限しない場合，何通りあるか.
（3）各箱に入れる物の数を少なくとも1個とする場合，何通りあるか.
＜解答例＞
（1）p.34の「2. の問題で各箱に入れる物を高々1個に制限する場合」に該当する. この問題では，同種の物の数$r=5$＞箱の数$n=3$であるため，3個の箱に1個ずつ入れる1通りの入れ方しかない.
（2）p.34の「2. の問題で各箱に入れる物の数を制限しない場合」に該当する.

$$ {}_{n}H_{r} = {}_{3}H_{5} = {}_{3+5-1}C_{5} = {}_{7}C_{5} = \frac{7!}{2!\,5!} = 21 $$

（3）p.35の「2. の問題で各箱に入れる物の数を少なくとも1個とする場合」に該当する.

$$ {}_{n}H_{r-n} = {}_{r-1}C_{n-1} = {}_{4}C_{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6 $$

問題15（pp.7-8）
6人が円形テーブルのまわりに並べられた6個の座席に座る場合の座り方の数を求めよ.

＜解答例＞
最初の1人が座るとき，全ての座席は全く同等なので，1通りの座り方しかない. 2人目以降は最初に座った人が起点となって，残り全ての座席に順番を着けたのと同じになるので，残りの人が座る方法は$n-1$個の物を全て使って作る順列の数になる.

$$ {}_{n-1}P_{n-1} = (n-1)! = 5! = 120 \text{通り} $$

問題16（pp.16-17）
パスカルの三角形において以下の問に答えよ.
（1）[x], x=a, b, c, d, e, fに入る ${}_{n}C_{r}$を求めよ.
（n, rを求める）.
（2）[x], x=a, b, c, d, e, fに入る数字を求めよ.

1
1 1
1 [a] 1
1 [b] [c] 1
1 [d] [e] [f] 1

＜解答例＞
（1）nは上から$n=0\to1\to2\to\cdots$，rは左から$r=0\to1\to2\to\cdots$となる. $[a]_2C_1, [b]_3C_1, [c]_3C_2, [d]_4C_1, [e]_4C_2, [f]_4C_3$

（2）ある場所の数値は，その左上と右上にある数値の和として求まる. $[a]=1+1=2, [b]=1+2=3, [c]=2+1=3, [d]=1+3=4, [e]=3+3=6, [f]=3+1=4$