情報数学

達成度確認試験
2013.1.31
木曜2限クラス

解答例と配点（62満点）

問題1（10点）

赤いボール3個，青いボール4個，黄色いボール2個を全て並べる順列の数を求めよ.

＜解答例＞

定理2.15の条件と同じであるから

$$\binom{9}{3,4,2} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1260$$

問題2（10点）

6人が円形テーブルのまわりに並べられた6個の座席に座る場合の座り方の数を求めよ．ただし，異なる座り方と見なされるのは，着席したときの互いの隣接関係が異なる場合のみである.

＜解答例＞
最初の1人が座るとき，全ての座席は全く同等なので，1通りの座り方しかない．2人目以降は最初に座った人が身印となって，残り全ての座席に順番を着けたのと同じになるので，残りの人が座る方法は$n-1$個の物を全て使って作る順列の数になる.

$${}_{n-1}P_{n-1} = (n-1)! = 5! = 120\text{通り}$$

問題3（10点）
次の漸化式の一般解を求めよ.

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5$$
$$a_0 = 1, a_1 = 2$$

＜解答例＞
同次解を求める.

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$$

に$a_n = K\alpha^n$を代入し，αを求める.

$$K\alpha^n - K\alpha^{n-1} - 6K\alpha^{n-2} = 0$$
$$\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$$
$$\alpha = 3, -2$$

同次解の一般解

$$a_n = K_1 3^n + K_2(-2)^n$$

特解を求める．漸化式の右辺＝nの0次式であるから，特解の候補を$a_n = An + B$とし，漸化式に代入する.

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2}$$
$$= An + B - (A(n-1) + B) - 6(A(n-2) + B)$$
$$-6An + (13A - 6B) = 5$$

両辺の係数を比較して，

$$A = 0, \qquad B = -\frac{5}{6}$$

特解

$$a_n = -\frac{5}{6}$$

一般解＝同次解＋特解

$$a_n = K_1 3^n + K_2(-2)^n - \frac{5}{6}$$

境界条件より

$$a_0 = K_1 + K_2 - \frac{5}{6} = 1$$
$$a_1 = K_1 3 + K_2(-2) - \frac{5}{6} = 2$$

これを解いて

$$K_1 = \frac{13}{10}, \qquad K_2 = \frac{8}{15}$$

一般解（最終）

$$a_n = \frac{13}{10}3^n + \frac{8}{15}(-2)^n - \frac{5}{6}$$

問題4（10点）

パン屋が3軒（A店，B店，C店）あります．3軒のパン屋で買い物をした100人と各パン屋で聞いたところ，以下のことが分かりました．

- A店でパンを買った人は40人．
- あんパンを買った人は20人．
- A店におけるあんパンの割合は30%である．

あんパンを買った人のうち，A店で買った人の割合（%）を求めよ．

＜解答例＞

事象X：A店でパンを買う．
事象Y：あんパンを買う．

与えられた条件

$$P(X) = 0.4, P(Y) = 0.2, P(Y|X) = 0.3$$

求めるもの：$P(X|Y)$

ベイズの定理より

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} = \frac{0.3 \times 0.4}{0.2} = 0.6$$

問題5（10点）

4人の死刑囚A，B，C，Dの中で1人だけ無作為に選ばれ，恩赦を受ける．誰が恩赦になるか看守は知っているが，囚人は知らない．
囚人Aが看守に「B，C，Dのうち2人は必ず処刑されるから，その2人の名前を教えてほしい」と頼んだ．看守はもっともだと思って「囚人CとDが処刑される」と教えた．

囚人Aは「はじめは助かる確率は1/4であった」が，情報を得てから「助かるのは自分かBなので，確率は1/2に上がった」と喜んだ．

囚人Aの計算は正しいか？ベイズの定理により囚人Aが助かる確率を計算して確かめよ．

事象を決める
事象A　Aが助かる
事象B　Bが助かる
事象C　Cが助かる
事象D　Dが助かる
事象SCD　看守が「CとDが処刑される」とAに教える

求める確率　$P(A|S_{CD})$

$$P(A|S_{CD}) = \frac{P(S_{CD}|A)P(A)}{P(S_{CD}|A)P(A) + P(S_{CD}|B)P(B) + P(S_{CD}|C)P(C) + P(S_{CD}|D)P(D)}$$

- 恩赦を受ける囚人は無作為に選ばれる（事前情報無し）
  $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = 1/4$（＊）
- Aが助かる場合：B，C，Dのうち2人は必ず処刑される．3人から2人を選ぶ組合せは3通りあるから，C，Dの組合せを選ぶ確率は
  $P(S_{CD}|A) = 1/3$
- Bが助かる場合：C，Dは必ず処刑されるから，
  $P(S_{CD}|B) = 1$
- CあるいはDが助かる場合：「CとDが処刑される」とは言わない．
  $P(S_{CD}|C) = P(S_{CD}|D) = 0$

以上より，

$$P(A|S_{CD}) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\text{（＊）}$$

となる．看守から情報を得た後も囚人Aが助かる確率は1/4（＊）であり，情報を得る前と変わらない．

従って，囚人Aの計算は間違っている．

問題6（4点×3＝12点）

表の出る確率がθである1枚のコインがある．このコインを2回投げたとき，1回目に表，2回目に裏が出た．このとき，表の出る確率θの事後分布に関して以下の問に答えよ．

1．事後分布の式を求めよ．
2．事後分布の概略図を描け．
3．$0.5 \le \theta \le 1$に対する確率を求めよ．

（答え）

1．事後分布の式

$$\pi_2(\theta) = \pi(\theta|D_2) = 6\theta(1-\theta)$$

2．事後分布の概略図　板書する

3．$0.5 \le \theta \le 1$に対する確率

$$P(0.5 \le \theta \le 1) = \int_{0.5}^{1} 6\theta(1-\theta)d\theta = \frac{1}{2}$$

＜解答例＞

■対象となる母数：表の出る確率＝ $\theta, 0 \le \theta \le 1$

■尤度$f(D|\theta)$

「表の出る確率＝ θ」の下でD（表／裏が出る）が起こる確率（条件付き確率）

$$f(表|\theta) = \theta$$
$$f(裏|\theta) = 1-\theta$$

■事前分布：$\pi(\theta) \rightarrow \pi_0(\theta)$‥コインを投げる前の事前分布

「表の出る確率」は$0 \le \theta \le 1$の範囲で考えられる．この範囲でθがどのように分布するかの情報はない．

「理由不十分の原則」に基づいて「一様分布」する．

$$\pi_0(\theta) = 1, 0 \le \theta \le 1$$

■「1回目に表が出た」というデータを取り込む

D_1：1回目に表が出る．

コインを1回投げた後のθの事後分布

$$\pi(\theta|D_1) \propto f(D_1|\theta) \times \pi_0(\theta) = \theta \times 1 = \theta$$

規格化条件（面積＝1）より，

$$\pi_1(\theta) = \pi(\theta|D_1) = 2\theta$$

2回目のコイン投げに対する事前分布となる．

■「2回目に裏が出た」というデータを取り込む

D_2：2回目に裏が出る．

コインを2回投げた後のθの事後分布

$$\pi(\theta|D_2) \propto f(D_2|\theta) \times \pi_1(\theta) = (1-\theta) \times 2\theta = 2\theta(1-\theta)$$

規格化条件（面積＝1）より

$$\pi_2(\theta) = \pi(\theta|D_2) = 6\theta(1-\theta)$$