高速フーリエ変換(FFT)の補足資料

$w = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$の性質

$$w = e^{-\frac{j2\pi}{8}}$$
$$w^8 = e^{-\frac{j2\pi}{8}\times 8} = e^{-j2\pi} = 1$$
$$w^{10} = w^2 \times w^8 = w^2$$
$$w^{r+8m} = w^r, 0 \le r \le 7$$
$$w^4 = -1$$

1

式(4.44)，(4.45)の説明

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ ab & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x_0 + x_1) \\ ab(x_0 - x_1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

2

FFTにおけるダウンサイジング

$$\begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^0 & w^2 \\ w^0 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix}$$

$w = e^{-\frac{j2\pi}{8}}$　　　$w = e^{-\frac{j2\pi}{4}}$

サンプル数＝4のDFT行列

↓

同様な行列分解が可能

3

計算量の比較

$x(n)$を実数としたときの計算回数(実数換算)

DFT　乗算 $= 2N^2$，加算 $= 2N(N-1) \cong 2N^2$

FFT　乗算 $= 2N\log_2 N$，加算 $= 3N\log_2 N$

(数値例)

	DFT		FFT	
サンプル数	乗算	加算	乗算	加算
64	8192	8192	786	1152
128	32768	32768	1792	2680
256	13万回	13万回	4096	6144
512	52万回	52万回	9216	13824
1024	210万回	210万回	2万回	3万回

4