

デジタル通信と信号処理

試験問題と解答例

(火曜1限クラス)

平成26年7月22日(火)

<56点満点>

c. 伝達関数の係数(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2)を求めよ.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

伝達関数の零点と極

Zero-r	1	Zero-f	2.4	[Hz]
Pole-r	0.6	Pole-f	1.2	[Hz]

伝達関数の係数(上:分子/下:分母)

a0	1	a1	0.616	a2	1
b0	1	b1	-0.706	b2	0.36

問題1 (3点×6=18点)

次に示すスケール係数と零点, 極に対して以下の間に答えよ.

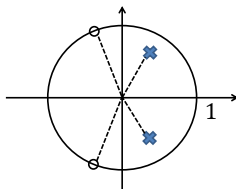
スケール係数: $h_0 = 1$ 零点: $r_z = 1, f_z = 2.4 \text{ Hz}$ 極: $r_p = 0.6, f_p = 1.2 \text{ Hz}$

a. 零点と極を極形式で表せ.

$$\omega_z T = \frac{2\pi f_z}{f_s} = 2\pi \times \frac{2.4}{8} = 0.6\pi = 1.88 \text{ [radian]}$$

$$\omega_p T = \frac{2\pi f_p}{f_s} = 2\pi \times \frac{1.2}{8} = 0.3\pi = 0.942 \text{ [radian]}$$

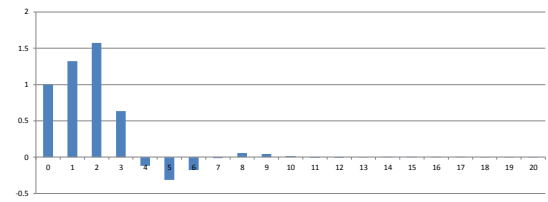
b. 零点と極を複素平面上に図示せよ. 単位円も図示し, 零点は○, 極は×で示せ.

零点: 108度
極: 54度d. $H(z)$ の振幅特性とインパルス応答を求めよ. 振幅特性は $f = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ Hz}$ における数値とグラフ(全体)を示し, インパルス応答は, $n = 0, 1, 2, 3, 4$ における数値とグラフ(全体)を示せ.

$$h(0) = 1, h(1) = 1.32, h(2) = 1.57, h(3) = 0.634$$

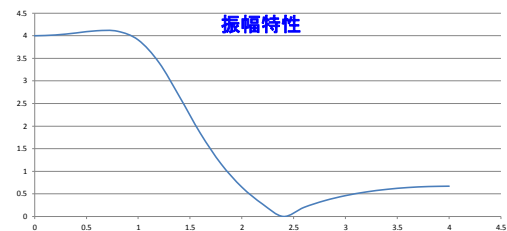
$$h(4) = -0.119$$

インパルス応答



周波数 振幅特性

0 Hz	4.0
1	3.91
2	0.649
3	0.461
4	0.67



e. 次の入力信号に対する出力信号 $y(n)$ をグラフで示せ.

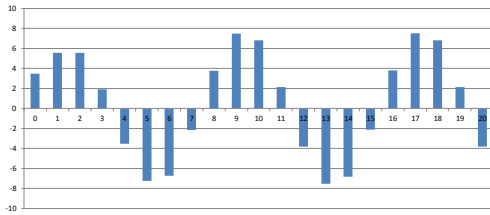
$$x(n) = 2\cos(2\pi f_1 nT) + 1.5\cos(2\pi f_2 nT)$$

$$f_1 = 1 \text{ Hz}, \quad f_2 = 2.4 \text{ Hz}$$

入力信号 (振幅=c1, c2, 周波数=f1, f2)

c1	2	f1	1	c2	1.5	f2	2.4	Impulse	
----	---	----	---	----	-----	----	-----	---------	--

出力信号



h0	1	スケーリング係数
----	---	----------

伝達関数の零点と極

Zero-r	1	Zero-f	2.8	[Hz]
Pole-r	0.7	Pole-f	1.4	[Hz]

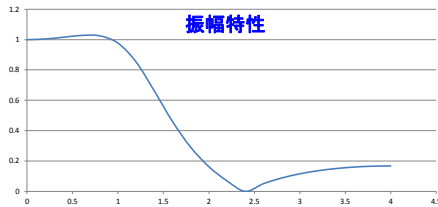
伝達関数の係数 (上: 分子 / 下: 分母)

a0	1	a1	1.17	a2	1
b0	1	b1	-0.636	b2	0.49

f. 振幅特性が $f = 0 \text{ Hz}$ で $|H(e^{j\omega})| = 1$ となるようにスケーリング係数 h_0 を調整せよ. h_0 の値と調整後の振幅特性をグラフで示せ.

$f = 0 \text{ Hz}$ における振幅特性が4.0であるから,

$$h_0 = \frac{1}{4.0} = 0.25$$



次に, 出力信号における f_1 成分が入力信号の2倍になるようにスケーリング係数 h_0 を決める.

$h_0 = 1$ としたとき, $f_1 = 1.6 \text{ Hz}$ における振幅特性が3.478であるから,

$$h_0 = \frac{2}{3.478} = 0.575$$

h0	0.575	スケーリング係数
----	-------	----------

伝達関数の零点と極

Zero-r	1	Zero-f	2.8	[Hz]
Pole-r	0.7	Pole-f	1.4	[Hz]

伝達関数の係数 (上: 分子 / 下: 分母)

a0	0.575	a1	0.675	a2	0.575
b0	1	b1	-0.636	b2	0.49

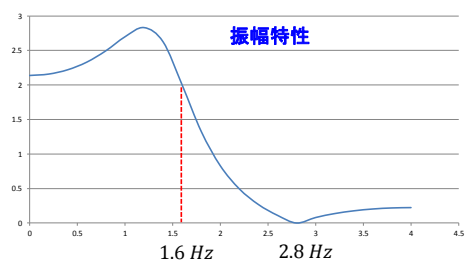
問題2 (3点 × 4 = 12点)

入力信号 $x(n)$ が $f_1 = 1.6 \text{ Hz}$, $f_2 = 2.8 \text{ Hz}$ の周波数成分からなるものとする. $H(z)$ を通すことにより, f_1 成分を2倍にし, f_2 成分を阻止したい. 伝達関数 $H(z)$ を設計せよ. 但し, 極は($r_p = 0.7$, $f_p = 1.4 \text{ Hz}$)とする.

a. 伝達関数 $H(z)$ の係数(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2)を求めよ.

f_2 成分を阻止するために, 零点を($r_z = 1$, $f_z = 2.8 \text{ Hz}$)とする. スケーリング係数は初めは $h_0 = 1$ とする.

b. $H(z)$ の振幅特性をグラフで示せ.

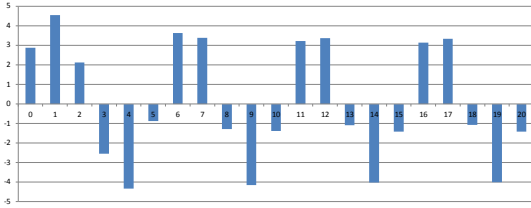


- c. 次の信号を入力したときの出力信号をグラフで示せ.
 $x(n) = 2\cos(\omega_1 nT) + 3\cos(\omega_2 nT), \omega_i = 2\pi f_i$

入力信号(振幅=c1, c2, 周波数=f1, f2)

c1	2	f1	1.6	c2	3	f2	2.8	Impulse
----	---	----	-----	----	---	----	-----	---------

出力信号



- c. 周波数領域を標本化することにより生じる時間領域の周期 T_0 を Δf で表せ.

$$T_0 = 1/\Delta f$$

- d. 時間領域で折り返し歪みが生じない条件を Δf で表せ.

$$0.95 \text{ sec} < T_0 = \frac{1}{\Delta f}$$

$$\Delta f < \frac{1}{0.95 \text{ sec}} = 1.05 \text{ Hz}$$

- d. cの結果から, 出力信号(定常応答の部分)には $f_1 = 1.6 \text{ Hz}$ の成分のみが含まれていることを示せ.
(ヒント) 1周期のサンプル数を調べる.

$n = 8$ 以降で定常応答になっている. 1周期のサンプル数が5サンプルであり, 周波数は

$$f = \frac{f_s}{5} = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ Hz}$$

であることが分かる.

- e. 設問b, dの結果より, サンプル数 N に対する条件を求めよ(有効数字4桁, 5桁目を四捨五入).

$$N = \frac{f_s}{\Delta f}, \quad 8 \text{ kHz} < f_s, \quad \Delta f < 1.05 \text{ Hz}$$

以上より, $7619 < N$

- f. 設問eの条件を満たす N を2のべき乗の最小値で表せ(4桁で表示).

$$7619 < N = 8192 = 2^{13}$$

- g. 設問fで求めた N に対する $\Delta f, T_0, f_s$ の一例を示せ. 但し, $\Delta f = 1 \text{ Hz}$ とする. f_s は4桁で表示する.

$$\Delta f = 1 \text{ Hz}, T_0 = \frac{1}{\Delta f} = 1 \text{ sec}, f_s = \Delta f N = 8192 \text{ Hz}$$

問題3 (2点 × 7 = 14点)

アナログ信号 $x(t)$ が0 ~ 0.95秒に分布し, そのフーリエ変換 $X(j\omega)$ は0 ~ 4kHzに分布しているものとする.

- a. 標本化周波数 f_s に対する条件を求めよ.

$$2 \times 4 \text{ kHz} = 8 \text{ kHz} < f_s$$

- b. 時間領域と周波数領域のサンプル数を N とすると, 周波数領域の標本間隔 Δf を f_s と N で表せ.

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

問題4 (4点 × 3 = 12点)

次式は4サンプルの離散フーリエ変換(DFT)である.

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^0 & w^2 \\ w^0 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}, \quad w = e^{-j\frac{2\pi}{4}}$$

- a. 周波数間引き(行の入替え)により, 上式を変形せよ.

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^0 & w^2 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(1) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

b. 設問aにより得られる行列を次のように表すとき、

$$\begin{bmatrix} F_1(2) & F_2(2) \\ F_3(2) & F_4(2) \end{bmatrix}$$

$F_1(2)$ と $F_2(2)$, $F_3(2)$ と $F_4(2)$, $F_1(2)$ と $F_3(2)$ の関係を示せ

$$F_2(2) = F_1(2)$$

$$F_4(2) = -F_3(2)$$

$$F_3(2) = F_1(2) \begin{bmatrix} w^0 & 0 \\ 0 & w^1 \end{bmatrix}$$

c. 設問bで得られた関係を用いて、4サンプルDFTを計算するシグナルフローグラフを求めよ。

$$\begin{bmatrix} w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & 0 \\ 0 & w^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4サンプルDFTのシグナルフローグラフ

