

(期末試験の予想問題／解答例—その2—)
問題2

離散フーリエ変換に関して以下の問に答えよ。

- ① 線形畳み込み和において、インパルス応答 $h(n)$ が l サンプル、入力信号 $x(n)$ が m サンプルであるとき、出力信号 $y(n)$ のサンプル数を求めよ。

$$y(n) \text{ のサンプル数} = l + m - 1$$

- ② インパルス応答が8サンプル、入力信号が10サンプルであるとき、出力信号のサンプル数を求めよ。

$$8 + 10 - 1 = 17 \text{ サンプル}$$

1

- ③ インパルス応答が8サンプル、入力信号が16サンプルである線形畳み込み和をDFT/IDFTを用いて計算するとき、DFTのサンプル数が N の満たす条件を求めよ。

線形畳み込み和による出力信号のサンプル数
 $8 + 16 - 1 = 23$

DFT/IDFTではサンプル数 N が周期となるから
 $23 < N$ または $24 \leq N$

2

- ④ インパルス応答が8サンプル、入力信号が16サンプルであり、DFT/IDFTのサンプル数が $N=20$ であるとき、何サンプルの折り返し歪みが発生するか。

線形畳み込み和による出力信号のサンプル数
 $8 + 16 - 1 = 23 (n = 0 \sim 22 \text{ に分布})$

DFT/IDFTによる出力信号は $n = 0 \sim 19$ が1周期で
 $n = 20 \sim 39$ が次の周期となる。従って、 $n = 20, 21, 22$
に折り返し歪みが発生する。
従って、3サンプルの折り返し歪みが発生する。

3

(参考)

インパルス応答 $h(n)$ が l サンプル、入力信号 $x(n)$ が m サンプルの線形畳み込み和を $y(n)$ とする。

$$y(n) = \sum_{i=0}^{l-1} h(i)x(n-i), n = 0 \sim l+m-1$$

DFT/IDFTによる出力信号= $y_D(n)$ とする。

$$h(n) \rightarrow \text{DFT} \rightarrow H(k), x(n) \rightarrow \text{DFT} \rightarrow X(k)$$

$$Y(k) = H(k)X(k) \rightarrow \text{IDFT} \rightarrow y_D(n)$$

DFTのサンプル数を N とすると、 $y_D(n)$ は N を周期とする周期関数となる。 $y_D(n)$ と $y(n)$ の関係は次のようになる。

$$y_D(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(n+kN)$$

4

- ④では、 $l = 8, m = 16$ であるから、 $y(n)$ は $n = 0 \sim 22$ に分布する。一方、DFTのサンプル数は $N = 20$ であるから、 $y_D(n)$ は次のようになる。

(第1周期: $n = 0 \sim 19$)

$$y_D(0) = y(0) + y(20), y_D(1) = y(1) + y(21)$$

$$y_D(2) = y(2) + y(22) \dots \text{以上、折り返し歪みあり}$$

$$y_D(n) = y(n), n = 3 \sim 19 \dots \text{折り返し歪みなし}$$

(第2周期: $n = 20 \sim 39$)

$$y_D(20) = y(0) + y(20), y_D(21) = y(1) + y(21)$$

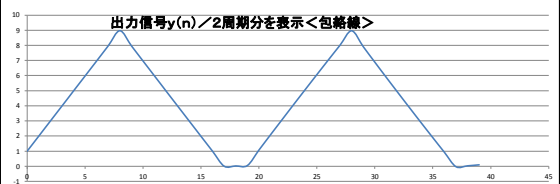
$$y_D(22) = y(2) + y(22) \dots \text{以上、折り返し歪みあり}$$

$$y_D(n) = y(n), n = 23 \sim 39 \dots \text{折り返し歪みなし}$$

5

- ⑤ $x(n) = 1, n = 0 \sim 8, h(n) = 1, n = 0 \sim 8$ に対する $y(n)$ を求め、その概略図(包絡線)を $n = 0 \sim 39$ の範囲で図示せよ。但し、DFTのサンプル数は $N = 20$ 。

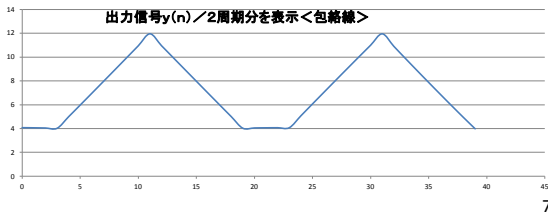
kit_dsp_DFT-IDFT.xlsxにおいて、sheet[xX]で $x(n)$ をsheet[hH]で $h(n)$ を入力し、sheet[Yy2]の $y(n)$ を表示。



6

- ⑥ $x(n) = 1, n = 0 \sim 11, h(n) = 1, n = 0 \sim 11$ に対する $y(n)$ を求めてその概略図(包絡線)を $n = 0 \sim 39$ の範囲で図示せよ。但し、DFTのサンプル数は $N = 20$ 。

kit_dsp_DFT-IDFT.xlsxにおいて、sheet[xX]で $x(n)$ を sheet[hH]で $h(n)$ を入力し、sheet[Yy2]の $y(n)$ を表示。



7

- ⑦ ⑤と⑥における $y(n)$ の違いについて述べよ。
(参考)⑤では折り返し歪みがないが、⑥ではある。

⑤では $x(n)$ が9サンプル、 $h(n)$ が9サンプルであり、線形畳み込み和による出力信号 $y(n)$ は $9 + 9 - 1 = 17$ サンプルである。一方、DFT/IDFTのサンプル数(周期)は $N = 20$ サンプルであり、 $17 < 20$ より折り返し歪みが発生しない。

⑥では $x(n)$ が12サンプル、 $h(n)$ が12サンプルであり、 $y(n)$ は $12 + 12 - 1 = 23$ サンプルとなる。 $N = 20 < 23$ であるため、 $n = 20, 21, 22$ において折り返し歪みが発生する。
 $y(n)$ の最大値は $x(n) = h(n) = 1$ のサンプル数で決まり、⑤が9サンプル、⑥が12サンプルであることから、各々の最大値は9と12になっている。

8

問題3

離散フーリエ変換(DFT)による線形畳み込み和 $y(n) = h(n) * x(n)$ に関して以下の問に答えよ(*は畳み込み和を表すものとする)。
DFTのサンプル数は $N = 20$ とする。

- ① $x(n) = 0.5, n = 0 \sim 2, x(n) = 1, n = 3 \sim 5, x(n) = 0.5, n = 6 \sim 8$ に対するDFT: $X(k)$ を求めて $k = 0, 4, 8$ における振幅と位相を数値で示せ。

kit_dsp_DFT-IDFT.xlsxのsheet[xX]を使用

k	振幅	位相(rad)
0	6	0
4	0.307	1.26
8	0.809	-0.623

9

- ② $h(n) = 1, n = 0 \sim 2, h(n) = 0.5, n = 3 \sim 5, h(n) = -0.5, n = 6 \sim 8$ に対するDFT: $H(k)$ を求めて $k = 0, 4, 8$ における振幅と位相を数値で示せ。

kit_dsp_DFT-IDFT.xlsxのsheet[hH]を使用

k	振幅	位相(rad)
0	3	0
4	1.43	-0.204
8	0.967	0.516

10

- ③ $k = 0, 4, 8$ における $Y(k)$ の振幅と位相を数値で示せ。
kit_dsp_DFT-IDFT.xlsxのsheet[YHX]を使用

k	振幅	位相(rad)
0	18	0
4	0.44	1.06
8	0.783	-0.107

- ④ ①～③の結果より、 $Y(k) = H(k)X(k)$ となっていることを示せ。

$|Y(k)| = |H(k)| \times |X(k)|$ となっていることを示す。

k	① $ X(k) $	② $ H(k) $	$ X(k) \times H(k) $	③ $ Y(k) $
0	6	3	18	18
4	0.307	1.43	0.439	0.44
8	0.809	0.967	0.782	0.783

(手計算)

(注) $|X(k)|, |H(k)|$ は①、②で回答しているため、ここでは記載不要

11

$\theta_Y(k) = \theta_H(k) + \theta_X(k)$ となっていることを示す。

k	① $\theta_X(k)$	② $\theta_H(k)$	$\theta_X(k) + \theta_H(k)$	③ $\theta_Y(k)$ [rad]
0	0	0	0	0
4	1.26	-0.204	1.056	1.06
8	-0.623	0.516	-0.107	-0.107

(手計算)

(注) $\theta_X(k), \theta_H(k)$ は①、②で回答しているため、ここでは記載不要

(参考)

$$|Y(k)|e^{j\theta_Y(k)} = |H(k)|e^{j\theta_H(k)} \times |X(k)|e^{j\theta_X(k)} \\ = |H(k)| \times |X(k)|e^{j(\theta_H(k) + \theta_X(k))}$$

振幅 $|Y(k)| = |H(k)| \times |X(k)|$... 積になっている

位相 $\theta_Y(k) = \theta_H(k) + \theta_X(k)$... 和になっている

12