# ディジタル通信と信号処理

## 小テスト

## 問題と解答例

（火曜1限クラス）

＜54点満点＞

平成26年6月3日（火）

---

## 問題1（5点）

システムのインパルス応答$h(n)$と入力信号$x(n)$，出力信号$y(n)$のフーリエ変換を$H(e^{j\omega}), X(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega})$とするとき，$Y(e^{j\omega})$を$H(e^{j\omega})$と$X(e^{j\omega})$を用いて表せ．

＜解答例＞

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

---

## 問題2

システムのインパルス応答が次式で与えられるものとする．

$h(0) = -0.3, h(1) = 0 \;\; h(2) = 0.7,$

$h(3) = 1, h(4) = 0.5, h(5) = -0.2$

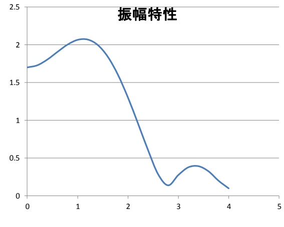
1. インパルス応答$h(n)$のフーリエ変換$H(e^{j\omega})$に関して，以下の問に答えよ．但し，標本化周波数は$f_s = 8Hz$とする．（2点×3＝6点）

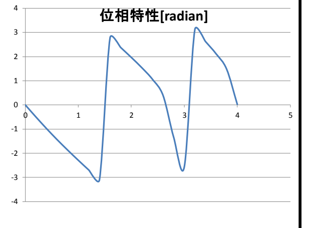
a. $H(e^{j\omega})$の計算式を示せ．

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{5} h(n)e^{-j\omega nT}$$

---

b. $H(e^{j\omega})$の振幅特性と位相特性の概略図を示せ．




c. 周波数0, 1, 2, 3, 4$Hz$における振幅特性と位相特性を数値（有効数字3桁）で示せ．

| 周波数[Hz] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 振幅特性 | 1.7 | 2.07 | 1.30 | 0.276 | 0.1 |
| 位相特性[radian] | 0 | -2.29 | 1.97 | -2.57 | 0.02 |

---

2. システムの入力信号が次式で与えられるものとする．（2点×4＝8点）

$x(n) = \cos(2\pi f nT), f = 0.8Hz, T = 1/f_s$

出力信号$y(n)$をインパルス応答$h(n)$と入力信号$x(n)$の畳み込み和により計算する方法に関して，以下の問に答えよ．

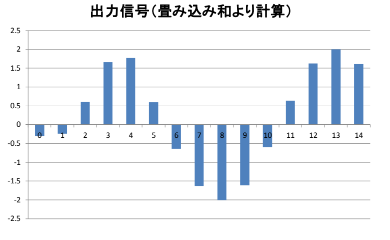
a. $y(n)$を畳み込み和で計算する式を示せ．更に，$y(6)$を$h(0) \sim h(5)$（数値）と$x(1) \sim x(6)$を用いて表せ．

$$y(n) = \sum_{k=0}^{5} h(k)x(n-k)$$

$$y(6) = -0.3x(6) + 0.7x(4) + x(3) + 0.5x(2) - 0.2x(1)$$

---

b. $y(n)$の概略図を示せ．



c. $n = 0 \sim 4, 10 \sim 14$における$y(n)$を数値（有効数字3桁）で示せ．

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y(n)$ | -0.3 | -0.243 | 0.607 | 1.66 | 1.77 |
| $n$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| $y(n)$ | -0.602 | 0.635 | 1.63 | 2.00 | 1.61 |

d. 出力信号を畳み込み和で計算する場合，過渡応答が現れる．その理由を述べよ．

「$y(0) \sim y(4)$の計算において，インパルス応答$h(0) \sim h(5)$は全て使われない．このときに，$y(n)$は過渡応答となる．$y(5)$以降では$h(0) \sim h(5)$が全て使われるので，定常応答となる．」

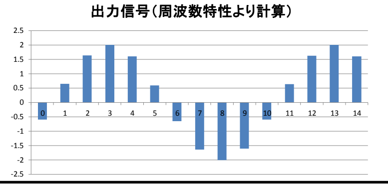
3. 出力信号$y(n)$を$H(e^{j\omega})$の振幅と位相を用いて計算する方法に関して，以下の問に答えよ．（2点×5＝10点）

a. $y(n)$を計算する一般式を示せ．更に，振幅と位相を該当する数値（有効数字3桁）で表した式を示せ．

$$y(n) = |H(e^{j\omega})|\cos(2\pi f n T + \theta(\omega)), T = \frac{1}{f_s}$$

$$y(n) = 2.00 \times \cos(2\pi f n T - 1.87), T = 1/f_s$$

b. $y(n)$の概略図を示せ．$n = 0$から定常応答となる．




c. $n = 10 \sim 14$における$y(n)$を数値（有効数字3桁）で示せ．

| $n$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y(n)$ | -0.596 | 0.640 | 1.63 | 2.00 | 1.61 |

d. 設問2と設問3における$y(10) \sim y(14)$がほぼ等しいことを示せ．
2-cと3-cの$y(10) \sim y(14)$を比較するとほぼ等しいことが示される．

e. 設問2と設問3における出力信号$y(n)$が何サンプル目からほぼ等しくなるかを示せ．
Excelによる計算結果によると，$n = 5$サンプル目からほぼ等しくなっている．これは，2-dの過渡応答が生じる理由とも一致している．

4. 出力信号 $y(n)$ の位相特性に関して以下の問に答えよ．（2点×5＝10点）

a. 入力（出力）信号（正弦波）の1周期におけるサンプル数を求めよ．

$$1周期のサンプル数 = \frac{f_s}{f} = \frac{8}{0.8} = 10サンプル$$

b. 1サンプル（標本間隔＝$T$秒）当たりの角度を求めよ．（参考）正弦波の1周期は$2\pi$[radian]である．

$$1サンプル当たりの角度 = \frac{2\pi}{10} = 0.628\ [\mathrm{radian}]$$

c. 入力信号$x(n)$に対する出力信号$y(n)$の遅れをサンプル数で求めよ．ピークのずれをグラフから読み取る．
Excelの計算結果において，出力信号（周波数特性より計算）のピークの位置を3サンプルと読む．

d. bとcの結果から，$y(n)$の位相[radian]を求めよ．
$y(n)$の位相 $= 0.628 \times 3 = 1.88$ [radian]
出力信号は遅れているので，$-1.88$ [radian]となる．

e. dの結果と設問1で求めた位相特性がほぼ一致していることを示せ．
・フーリエ変換で計算した$f = 0.8Hz$における$H(e^{j\omega})$の位相$= -1.87$[radian]
・$y(n)$の遅れ時間から計算した位相$= -1.88$ [radian]
これらは，ほぼ一致することが分かる．

5. 出力信号$y(n)$として次式を得たい．入力信号$x(n)$の周波数$f$を何$Hz$にすればよいか．（5点）

$$y(n) = 1.60\cos(2\pi f n T + 2.38)$$

フーリエ変換$H(e^{j\omega})$の振幅$= 1.60$，位相$= 2.38$である周波数を求めると$f = 1.8$ [Hz]である．

6. 位相計算に関して以下の問に答えよ.（5点）

$$H(e^{j\omega}) = Re(\omega) + jIm(\omega)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}\right)$$

上式で計算される$\theta$は$-\pi/2 \sim \pi/2$に分布する. これを$-\pi \sim \pi$に分布するようにするための計算式を求めよ.

上式の$\theta$を$\theta_t$とする.

$$If\ Re[H(e^{j\omega})] > 0, \qquad \theta(\omega) = \theta_t(\omega)$$

$$If\ \ Re[H(e^{j\omega})] < 0, Im[H(e^{j\omega})] > 0, \theta(\omega) = \theta_t(\omega) + \pi$$

$$If\ \ Re[H(e^{j\omega})] < 0, Im[H(e^{j\omega})] < 0, \theta(\omega) = \theta_t(\omega) - \pi$$

7. 入力信号$x(n)$の周波数が$5[Hz]$であるとき，標本化周波数$f_s$の満たすべき条件を求めよ.（5点）

標本化定理より $2 \times 5[Hz] = 10[Hz] < f_s$