情報数学

試験問題
2014.1.30
木曜2限クラス

問題と解答例

答えが数値の場合は分数または小数で表現すること.
分数は約分し，簡単な数値にすること. 少数は有効数字3桁以内で表現すること. 4桁目は四捨五入すること.

問題1（10点）

赤いボール3個，青いボール2個，黄色いボール1個から5個選んで作る順列の数を求めよ.

＜解答例＞
全てのボールを使用しない場合であり，5個の構成を分けて定理2.15を適用する.
＜5個の構成＞
①赤3個＋青2個
②赤3個＋青1個＋黄色1個
③赤2個＋青2個＋黄色1個

①＋②＋③= $\binom{5}{3,2}+\binom{5}{3,1,1}+\binom{5}{2,2,1}$

$$=\frac{5!}{3!\,2!}+\frac{5!}{3!\,1!\,1!}+\frac{5!}{2!\,2!\,1!}=10+20+30=60$$

問題2（5点×2＝10点）

3種類の菓子で合計8個入りの菓子折りを作る.
（1）何通りの作り方があるか.
（2）3種類から少なくとも1個は入れるとすると，何通りになるか.
＜解答例＞
（1）3種類の異なる物から重複を許して8個取って作る組合せの数に等しい.

$${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8=\frac{10!}{2!\,8!}=45$$

（2）条件を満たすために，予め，3種類の菓子から1個ずつ選んで菓子折に入れる. 問題は次のようになる「3種類の異なる物から重複を許して5個取って作る組合せの数」

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5=\frac{7!}{2!\,5!}=21$$

問題3（10点）

次の漸化式の一般解を求めよ.

$$a_n+2a_{n-1}-3a_{n-2}=3$$
$$a_0=1,a_1=2$$

＜解答例＞
同次解を求める.

$$a_n+2a_{n-1}-3a_{n-2}=0$$

において，$a_n=K\alpha^n$とし，特性方程式を求める.

$$\alpha^2+2\alpha-3=0$$

これを解いて，

$$\alpha=-3,1$$

同次解の一般解

$$a_n=K_1(-3)^n+K_2 1^n$$

次に，漸化式の特解を求める.

$$a_n+2a_{n-1}-3a_{n-2}=3$$

右辺が定数であるから，特解を$a_n=An+B$とおいて，上式に代入する.

$$(An+B)+2(A(n-1)+B)-3(A(n-2)+B)$$
$$=4A=3\to A=3/4$$

これより，特解は

$$a_n=\frac{3}{4}n$$

未定係数を含む一般解

$$a_n=K_1(-3)^n+K_2 1^n+\frac{3}{4}n$$

境界条件より

$$a_0=K_1+K_2=1$$
$$a_1=-3K_1+K_2+\frac{3}{4}=2$$

これを解いて，

$$K_1=-\frac{1}{16},\qquad K_2=\frac{17}{16}$$

最終的な一般解

$$a_n=-\frac{1}{16}(-3)^n+\frac{17}{16}1^n+\frac{3}{4}n$$

問題4（10点）

パン屋が3軒（A店，B店，C店）あります．3軒のパン屋で買い物をした100人と各パン屋で聞いたところ，以下のことが分かりました．

- A店でパンを買った人は40人．
- あんパンを買った人は20人．
- あんパンを買った人のうち，A店で買った人の割合は60%である．

A店におけるあんパンの割合（%）を求めよ．

事象を決める
事象A　Aが助かる
事象B　Bが助かる
事象C　Cが助かる
事象SB　看守が「Bが処刑される」とAに教える

求める確率　$P(A|S_B)$

ベイズの定理より

$$P(A|S_B) = \frac{P(S_B|A)P(A)}{P(S_B|A)P(A) + P(S_B|B)P(B) + P(S_B|C)P(C)}$$

＜解答例＞
事象A：　A店でパンを買う $P(A)$
事象S：　あんパンを買う　$P(S)$
求めるもの：　$P(S|A)$

与えられている条件：
$P(A) = 0.4,\quad P(S) = 0.2,\quad P(A|S) = 0.6$

ベイズの定理より，

$$P(A|S) = \frac{P(S|A)P(A)}{P(S)}$$

$P(S|A)$を求める式に変形する．

$$P(S|A) = \frac{P(A|S)P(S)}{P(A)} = \frac{0.6 \times 0.2}{0.4} = \frac{0.12}{0.4} = 0.3$$

- 恩赦を受ける囚人は無作為に選ばれる（事前情報無し）
$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3（＊）$$
- Aが助かる場合：B，Cのうち１人は必ず処刑される．２人から１人を選ぶ組合せは2通りあるから，Bを選ぶ確率は1/2である．
$$P(S_B|A) = 1/2$$
- Bが助かる場合：看守は「Bが処刑される」とは言わない．
$$P(S_B|B) = 0$$
- Cが助かる場合：看守は囚人Aに対して，必ず「Bが処刑される」と言う．
$$P(S_B|C) = 1$$

問題5（10点）

３人の死刑囚A，B，Cの中で１人だけ無作為に選ばれ，恩赦を受ける．誰が恩赦になるか看守は知っているが，囚人は知らない．
囚人Aが看守に「B，Cのうち１人は必ず処刑されるから，その名前を教えてほしい」と頼んだ．看守はもっともだと思って「囚人Bが処刑される」と教えた．

囚人Aは「はじめは助かる確率は1/3であった」が，情報を得てから「助かるのは自分かCなので，確率は1/2に上がった」と喜んだ．

囚人Aの計算は正しいか？ベイズの定理により囚人Aが助かる確率を計算して確かめよ．

以上より，

$$P(A|S_B) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}（＊）$$

となり，囚人Aが助かる確率は情報を得た後も1/3であり，情報を得る前と変わらない．従って，囚人Aの計算は間違っている．

問題6（5点×2＝10点）

3人の治験者を抽出し，新薬の効用を調べたところ，2人には効き，1人には効かないことが分かった．新薬の効き具合の分布を調べ，以下の問に答えよ．

1．新薬の効き具合の分布を式で表せ．

2．$0.5 \leq \theta \leq 1$に対する確率を求めよ．

（答え）

1．分布の式　$\pi(\theta|D) = 12\theta^2(1-\theta)$

2．$0.5 \leq \theta \leq 1$に対する確率

$$P(0.5 \leq \theta \leq 1) = \int_{0.5}^{1} 12\theta^2(1-\theta)d\theta = \frac{11}{16}$$

＜解答例＞

■ベイズ統計の母数

抽出した1人の治験者に新薬が効く確率θ

■尤度：$f(D|\theta)$

「効く確率」θのもとで，データD（3人のうち2人に効き，1人に効かない）の起こる確率（二項分布より求まる）

$$f(D|\theta) = {}_3C_2\theta^2(1-\theta)^1, 0 \leq \theta \leq 1$$

■事前分布：$\pi(\theta)$

治験するまでは効く確率θに関する情報はないので，理由不十分の原則より全ての可能性は均等であるとする．

$$\pi(\theta) = k$$

$0 \leq \theta \leq 1$であり，確率の総和（面積）＝1より，

事前分布　$\pi(\theta) = 1, 0 \leq \theta \leq 1$

■事後分布：$\pi(\theta|D)$

ベイズ統計の基本公式より

事後分布∝尤度×事前分布

$$\pi(\theta|D) \propto {}_3C_2\theta^2(1-\theta)^1 \times 1 \propto \theta^2(1-\theta)$$

$\pi(\theta|D)$の積分＝1より，

$$\int_0^1 k\theta^2(1-\theta)d\theta = \frac{k}{12} = 1 \to k = 12$$

$$\pi(\theta|D) = 12\theta^2(1-\theta)$$