# 情報数学

試験問題
2014.1.30
木曜3限クラス
問題と解答例

答えが数値の場合は分数または小数で表現すること.
分数は約分し，簡単な数値にすること. 少数は有効数字3桁以内で表現すること. 4桁目は四捨五入すること.

---

問題1（10点）

赤いボール4個，青いボール3個，黄色いボール2個を全て並べる順列の数を求めよ.

＜解答例＞

定理2.15の条件と同じであるから

$$\binom{9}{4,3,2} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$$

---

問題2（4＋3＋3＝10点）

男子４人と女子２人を１列に並べるとき，次の問に答えよ.
（１）全部の並べ方は何通りあるか.
（２）女子２人が隣り合う並べ方は何通りあるか.
（３）女子２人が隣り合わない並べ方は何通りあるか.

＜解答例＞
（１）6人は全て異なるので，次式で与えられる.

$${}_6P_6 = 6! = 720$$

（２）女子２人が1組となるので，人数は5人と見なせる.
女子２人の並びが2通りあるので，次のようになる.

$$2 \times {}_5P_5 = 2 \times 5! = 240$$

（３）（１）から（２）を引いたものに相当する.

$$720 - 240 = 480$$

---

問題3（10点）

次の漸化式の一般解を求めよ.

$$a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 5, \qquad n \geq 2$$
$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 2$$

＜解答例＞
同次解を求める.

$$a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0, \qquad n \geq 2$$

$a_n = K\alpha^n$を上式に代入する.

$$\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$$

これを解いて，

$$\alpha = 3, \qquad -1$$

同次解の一般式

$$a_n = K_1 3^n + K_2(-1)^n$$

---

次に，特解を求める.

$$a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 5, \qquad n \geq 2$$

右辺が定数なので，特解を$a_n = An + B$とおいて，上式に代入する.

$$(An + B) - 2(A(n-1) + B) - 3(A(n-2) + B)$$
$$= -4An + (8A - 4B) = 5$$

これより，

$$A = 0, \qquad B = -\frac{5}{4}$$

特解は次のようになる.

$$a_n = -\frac{5}{4}$$

未定係数を含む一般解

$$a_n = K_1 3^n + K_2(-1)^n - \frac{5}{4}$$

---

境界条件より，$\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$を求める.

$$a_n = K_1 3^n + K_2(-1)^n - \frac{5}{4}$$
$$a_0 = K_1 + K_2 - \frac{5}{4} = 1$$
$$a_1 = 3K_1 - K_2 - \frac{5}{4} = 2$$

これより，

$$K_1 = \frac{11}{8}, \qquad K_2 = \frac{7}{8}$$

最終的な一般解

$$a_n = \frac{11}{8} 3^n + \frac{7}{8}(-1)^n - \frac{5}{4}$$

問題4（10点）

パン屋が3軒（A店，B店，C店）あります．3軒のパン屋で買い物をした100人と各パン屋で聞いたところ，以下のことが分かりました．

- フランスパンを買った人のうち，C店で買った人の割合は50%．
- C店におけるフランスパンの割合は20%．
- C店でパンを買った人の割合は40%．

100人のうち，フランスパンを買った人は何人か？

目標：赤玉が得られたとき，それが壺$i$から取り出された確率を全ての$i=1,2$について求める．

データ$D$が得られたとき，その仮定が$H_i$である確率$P(H_i|D)$を全ての$i=1,2,3$について求める．

$$P(H_i|D)=\frac{P(D|H_i)P(H_i)}{P(D|H_1)P(H_1)+P(D|H_2)P(H_2)+P(D|H_3)P(H_3)}$$

$P(D|H_i)$：壺$i$から赤玉を1個取り出す確率．

$$P(D|H_1)=\frac{1}{5}, P(D|H_2)=\frac{3}{5}, P(D|H_3)=\frac{5}{5}$$

$P(H_i)$：壺$i$が選ばれる確率（問題では与えられていない）

→「理由不十分の原則」に基づき等確率とする．

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3$$

＜解答例＞

事象A：　C店でパンを買う $P(C)$

事象F：　フランスパンを買う　$P(F)$

求めるもの：　$P(F)$

与えられている条件：

$P(C|F)=0.5,\quad P(F|C)=0.2,\quad P(C)=0.4$

ベイズの定理より，

$$P(C|F)=\frac{P(F|C)P(C)}{P(F)}$$

$P(F)$を求める式に変形する．

$$P(F)=\frac{P(F|C)P(C)}{P(C|F)}=\frac{0.2\times 0.4}{0.5}=0.16$$

フランスパンを買った人は16人．

上記の確率を用いて目的の確率分布が求まる．

$$P(H_1|D)=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{5}\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}$$

$P(H_2|D), P(H_3|D)$についても，同様に計算できる．

| 赤玉の個数 | 1個 | 3個 | 5個 |
|---|---|---|---|
| 確率 | $P(H_1\|D)=1/9$ | $P(H_2\|D)=3/9$ | $P(H_3\|D)=5/9$ |

確率の合計：

$$\frac{1}{9}+\frac{3}{9}+\frac{5}{9}=1$$

問題5（10点）

1個の壺がある．壺の中には白と赤の5個の玉が入っている．そこから玉1個を取りだしたとき，それが赤玉であった（結果）．壺の中に入っている赤玉の個数（仮定／原因）の確率を求めよ．但し，壺の中にある赤玉の個数は奇数であることが分かっている．

＜解答例＞

仮定（原因）：壺の中の赤玉の個数＝1，3，5個

壺1[○○○○●]，壺2[○○●●●]

壺3[●●●●●]

$H_i$：壺$i$から玉1個取り出す．$i=1,2,3$

結果：取りだした玉が赤玉である．

$D$：壺から玉1個を取りだしたとき，それが赤玉である．

問題6（4＋3＋3＝10点）

表の出る確率が$\theta$である1枚のコインがある．このコインを2回投げたとき，1回目に表，2回目に裏が出た．このとき，表の出る確率$\theta$の事後分布に関して以下の問に答えよ．

1. 事後分布の式を求めよ．
2. 事後分布の概略図を描け．
3. $0.5\le\theta\le 1$に対する確率を求めよ．

＜解答例＞

■対象となる母数：表の出る確率＝ $\theta, 0 \leq \theta \leq 1$

■尤度 $f(D|\theta)$

「表の出る確率＝ $\theta$」の下で $D$（表／裏が出る）が起こる確率（条件付き確率）

$$f(表|\theta) = \theta$$
$$f(裏|\theta) = 1 - \theta$$

■事前分布：$\pi(\theta) \to \pi_0(\theta)$‥コインを投げる前の事前分布

「表の出る確率」は $0 \leq \theta \leq 1$ の範囲で考えられる．この範囲で $\theta$ がどのように分布するかの情報はない．

「理由不十分の原則」に基づいて「一様分布」する．

$$\pi_0(\theta) = 1, 0 \leq \theta \leq 1$$

■「1回目に表が出た」というデータを取り込む

$D_1$：1回目に表が出る．

コインを1回投げた後の $\theta$ の事後分布

$$\pi(\theta|D_1) \propto f(D_1|\theta) \times \pi_0(\theta) = \theta \times 1 = \theta$$

規格化条件（面積＝1）より，

$$\pi_1(\theta) = \pi(\theta|D_1) = 2\theta$$

2回目のコイン投げに対する事前分布となる．

■「2回目に裏が出た」というデータを取り込む

$D_2$：2回目に裏が出る．

コインを2回投げた後の $\theta$ の事後分布

$$\pi(\theta|D_2) \propto f(D_2|\theta) \times \pi_1(\theta) = (1-\theta) \times 2\theta = 2\theta(1-\theta)$$

規格化条件（面積＝1）より

$$\pi_2(\theta) = \pi(\theta|D_2) = 6\theta(1-\theta)$$

（答え）

1. 事後分布の式

$$\pi_2(\theta) = \pi(\theta|D_2) = 6\theta(1-\theta)$$

2. 事後分布の概略図

$\theta = 0.5$ を中心とする対称な山型（板書する）

3. $0.5 \leq \theta \leq 1$ に対する確率

$$P(0.5 \leq \theta \leq 1) = \int_{0.5}^{1} 6\theta(1-\theta)d\theta = \frac{1}{2}$$