平成28年度前期
工学部・情報工学科

情報数学
期末試験（水曜1限クラス）
問題と解答例（55点満点）

2016.7.27

（注意事項）
- 教科書，資料等の持ち込み不可．電卓専用機使用可．
- 解答は既約分数または小数（有効数字3桁）で示すこと．
- 計算過程を示すこと．

＜試験終了後に問題用紙を回収します＞

1

問題1（10点）

ある客船の乗客について以下のことが分かっている．

- 乗客の中の日本人の割合は40%である．
- 日本人の中の男性の割合は60%である．

乗客のなかから1人を選び出したとき，それが日本人男性である確率を求めよ．
ただし，次の関係に基づいて計算すること．

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

事象A：選ばれた人が日本人である
事象B：選ばれた人が男性である

2

＜解答例＞

事象A：選ばれた人が日本人である
事象B：選ばれた人が男性である
- 乗客の中の日本人の割合は40%である．

$$P(A)=0.4$$

- 日本人の中の男性の割合は60%である．

$$P(B|A)=0.6$$

乗客のなかから1人を選び出したとき，それが日本人男性である確率＝ $P(A\cap B)$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

より

$$P(A\cap B)=P(B|A)P(A)=0.6\times 0.4=0.24\left(=\frac{6}{25}\right)$$

3

問題2（10点）

パン屋が3軒あり，売っている種類は以下の通りである．
A店　あんパン，メロンパン
B店　クロワッサン，フランスパン，あんパン，ジャムパン
C店　メロンパン，あんパン，クリームパン

ある人がメロンパンを買ったとき，それをC店で買った確率を求めよ．ベイズの定理を用いて計算すること．

但し，3軒のパン屋が選ばれる確率は同じ（1/3）である．
また，1軒のパン屋の中である種類のパンが買われる確率は同じである（例：3種類のパンを売っているパン屋では，1種類のパンが買われる確率は1/3）．

4

＜解答例＞

事象A　A店でパンを買う，事象B　B店でパンを買う
事象C　C店でパンを買う，事象Mp　メロンパンを買う
メロンパンを買ったとき，それをC店で買った確率はベイズの定理より次式で与えられる．

$$P(C|M_p)=\frac{P(M_p|C)P(C)}{P(M_p)}$$

$$=\frac{P(M_p|C)P(C)}{P(M_p|A)P(A)+P(M_p|B)P(B)+P(M_p|C)P(C)}$$

条件より　$P(A)=P(B)=P(C)=1/3$

$$P(M_p|A)=1/2,P(M_p|B)=0/4,P(M_p|C)=1/3$$

これらの値を上式に代入する．

$$P(C|M_p)=\frac{2}{5}$$

5

問題3（10点）

1個の壺がある．壺の中には白と赤の5個の玉が入っている．そこから玉1個を取りだしたとき，それが赤玉であった（結果）．壺の中に入っている赤玉の個数（仮定／原因）の確率を求めよ．但し，壺の中にある赤玉の個数は3個以下であることが分かっている．

6

＜解答例＞

仮定（原因）：壺の中の赤玉の個数＝1，2，3個

壺1［○○○○●］，壺2［○○○○●●］

壺3［○○●●●］

H_i：壺iから玉1個取り出す．$i=1,2,3$

結果：取りだした玉が赤玉である．

D：壺から玉1個を取りだしたとき，それが赤玉である．

目標：赤玉が得られたとき，それが壺iから取り出された確率を全ての$i=1,2,3$について求める．

データDが得られたとき，その仮定がH_iである確率$P(H_i|D)$を全ての$i=1,2,3$について求める．

$$P(H_i|D) = \frac{P(D|H_i)P(H_i)}{P(D|H_1)P(H_1)+P(D|H_2)P(H_2)+P(D|H_3)P(H_3)}$$

$P(D|H_i)$：壺iから赤玉を1個取り出す確率．

$$P(D|H_1)=\frac{1}{5}, P(D|H_2)=\frac{2}{5}, P(D|H_2)=\frac{3}{5}$$

$P(H_i)$：壺iが選ばれる確率（問題では与えられていない）

→「理由不十分の原則」に基づき等確率とする．

$$P(H_1)=P(H_2)=H(H_3)=\frac{1}{3}$$

上記の確率を用いて目的の確率分布が求まる．

$$P(H_1|D)=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}$$

$$P(H_2|D)=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(H_3|D)=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

以上より，取り出した玉が赤玉であったとき，壺の中の赤玉が1個である確率＝1/6，2個である確率＝2/6，3個である確率＝3/6である．

問題4（10点）

3人の死刑囚A，B，Cの中で1人だけ無作為に選ばれ，恩赦を受ける．誰が恩赦になるか看守は知っているが，囚人は知らない．
囚人Aが看守に「B，Cのうち誰かは必ず処刑されるから，その人の名前を教えてほしい」と頼んだ．看守はもっともだと思って「囚人Bが処刑される」と教えた．

囚人Aは「はじめは助かる確率は1/3であった」が，情報を得てから「助かるのは自分かCなので，確率は1/2に上がった」と喜んだ．囚人Aの計算は正しいか？

＊ベイズの定理により，囚人Aが助かる確率を情報の入手前と入手後で計算し，比較すること．

＜解答例＞

事象を決める

事象A　Aが助かる

事象B　Bが助かる

事象C　Cが助かる

事象SB　看守が「Bが処刑される」とAに教える

求める確率　$P(A|S_B)$

$$P(A|S_B)=\frac{P(S_B|A)P(A)}{P(S_B|A)P(A)+P(S_B|B)P(B)+P(S_B|C)P(C)}$$

- 恩赦を受ける囚人は無作為に選ばれる（事前情報無し）

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/3(*)$$

- Bが助かる場合：「Bが処刑される」とは言わない．

$$P(S_B|B)=0$$

- Aが助かる場合：B，Cとも処刑されるので，2人から1人を選ぶ．

$$P(S_B|A)=1/2$$

- Cが助かる場合：B，Cのなかで処刑されるのは必ずBである．

$$P(S_B|C)=1$$

以上より，

$$P(A|S_B)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}(*)$$

となり，情報を得ても助かる確率は変わらない．従って，囚人Aの計算は間違っている．

問題5（5点×3＝15点）

表の出る確率がθである1枚のコインがある．このコインを2回投げたとき，1回目に裏，2回目に表が出た．このとき，表の出る確率θの事後分布に関して以下の問に答えよ．

1．θの事後分布の式を求めよ．
（事後分布∝尤度×事前分布）の関係を順次適用して最終的な事後分布を求めること．
2．θの事後分布の概略図を描け．
$\theta = 0, 1$における事後分布の値，及び，事後分布の最大値とそのときのθの値を付記すること．
3．$0.5 \le \theta \le 1$に対する確率を求めよ．

＊計算過程を示すこと．

＜解答例＞

■対象となる母数：表の出る確率$= \theta, 0 \le \theta \le 1$

■尤度$f(D|\theta)$
「表の出る確率$= \theta$」の下でD（表／裏が出る）が起こる確率（条件付き確率）

$$f(表|\theta) = \theta$$
$$f(裏|\theta) = 1 - \theta$$

■事前分布：$\pi(\theta) \rightarrow \pi_0(\theta)$‥コインを投げる前の事前分布
「表の出る確率」は$0 \le \theta \le 1$の範囲で考えられる．この範囲でθがどのように分布するかの情報はない．
「理由不十分の原則」に基づいて「一様分布」する．

$$\pi_0(\theta) = 1, 0 \le \theta \le 1$$

■「1回目に裏が出た」というデータを取り込む
D_1：1回目に裏が出る．
コインを1回投げた後のθの事後分布

$$\pi(\theta|D_1) \propto f(D_1|\theta) \times \pi_0(\theta) = (1-\theta) \times 1 = 1 - \theta$$

規格化条件（面積＝1）より，

$$\pi_1(\theta) = \pi(\theta|D_1) = 2(1-\theta)$$

$\pi_1(\theta)$が2回目のコイン投げに対する事前分布となる．

■「2回目に表が出た」というデータを取り込む
D_2：2回目に表が出る．
コインを2回投げた後のθの事後分布

$$\pi(\theta|D_2) \propto f(D_2|\theta) \times \pi_1(\theta) = \theta \times 2(1-\theta) = 2\theta(1-\theta)$$

規格化条件（面積＝1）より

$$\pi_2(\theta) = \pi(\theta|D_2) = 6\theta(1-\theta)$$

（まとめ）

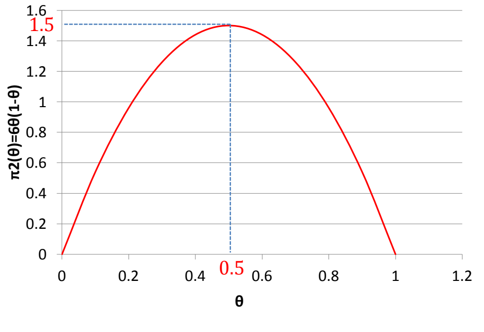
1．事後分布の式

$$\pi_2(\theta) = \pi(\theta|D_2) = 6\theta(1-\theta)$$

2．事後分布の概略図（次頁）

3．$0.5 \le \theta \le 1$に対する確率

$$P(0.5 \le \theta \le 1) = \int_{0.5}^{1} 6\theta(1-\theta)d\theta = 0.5$$



成績集計

小テスト1 30	小テスト2 40	中間 40	期末 55	総合 100	合否
29	30	37	37	87.4	○
a_1	a_2	b	c	x	再試 ×

$$x = \left(\frac{a_1}{30} + \frac{a_2}{40}\right) \times 15 + b \times \frac{30}{40} + c \times \frac{40}{55} + \alpha$$