平成28年度前期
工学部・情報工学科

# 情報数学
## 期末試験（水曜2限クラス）
## 問題と解答例（55点満点）

2016.7.27

（注意事項）
- 教科書，資料等の持ち込み不可．電卓専用機使用可．
- 解答は既約分数または小数（有効数字3桁）で示すこと．
- 計算過程を示すこと．

*＜問題用紙は持ち帰ってください＞*



問題1（10点）

ある客船の乗客について以下のことが分かっている．

- 乗客の中の日本人の割合は50%である．
- 乗客の中の日本人男性の割合は20%である．

乗客のなかから日本人を選び出したとき，それが男性である確率を求めよ．
ただし，次の関係に基づいて計算すること．

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

事象A：選ばれた人が日本人である
事象B：選ばれた人が男性である



＜解答例＞

事象A：選ばれた人が日本人である
事象B：選ばれた人が男性である

- 乗客の中の日本人の割合は50%である．

$$P(A) = 0.5$$

- 日本人の中の日本人男性の割合は20%である．

$$P(A \cap B) = 0.2$$

乗客のなかから日本人を選び出したとき，それが男性である確率＝ $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5} = 0.4$$



問題2（10点）

パン屋が3軒あり，売っている種類は以下の通りである．
A店　あんパン，メロンパン
B店　クロワッサン，フランスパン，あんパン，メロンパン
C店　メロンパン，あんパン，クリームパン

ある人がメロンパンを買ったとき，それをB店で買った確率を求めよ．ベイズの定理を用いて計算すること．

但し，3軒のパン屋が選ばれる確率は同じ（1/3）である．
また，1軒のパン屋の中である種類のパンが買われる確率は同じである（例：3種類のパンを売っているパン屋では，1種類のパンが買われる確率は1/3）．



＜解答例＞

事象A　A店でパンを買う，事象B　B店でパンを買う
事象C　C店でパンを買う，事象Mp　メロンパンを買う
メロンパンを買ったとき，それをB店で買った確率はベイズの定理より次式で与えられる．

$$P(B|M_p) = \frac{P(M_p|B)P(B)}{P(M_p)}$$

$$= \frac{P(M_p|B)P(B)}{P(M_p|A)P(A) + P(M_p|B)P(B) + P(M_p|C)P(C)}$$

条件より　$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$

$$P(M_p|A) = 1/2, P(M_p|B) = 1/4, P(M_p|C) = 1/3$$

これらの値を上式に代入する．

$$P(C|M_p) = \frac{3}{13}$$



問題3（10点）

1個の壺がある．壺の中には白と赤の5個の玉が入っている．そこから玉1個を取りだしたとき，それが赤玉であった（結果）．壺の中に入っている赤玉の個数（仮定／原因）の確率を求めよ．但し，壺の中にある赤玉の個数は2個以上，4個以下であることが分かっている．

＜解答例＞

仮定（原因）：壺の中の赤玉の個数＝2，3，4個

壺1［○○○●●］，壺2［○○○●●●］

壺3［○●●●●］

$H_i$：壺$i$から玉1個取り出す．$i = 1, 2, 3$

結果：取りだした玉が赤玉である．

$D$：壺から玉1個を取りだしたとき，それが赤玉である．

目標：赤玉が得られたとき，それが壺$i$から取り出された確率を全ての$i = 1, 2, 3$について求める．

データ$D$が得られたとき，その仮定が$H_i$である確率$P(H_i|D)$を全ての$i = 1, 2, 3$について求める．

$$P(H_i|D) = \frac{P(D|H_i)P(H_i)}{P(D|H_1)P(H_1) + P(D|H_2)P(H_2) + P(D|H_3)P(H_3)}$$



$P(D|H_i)$：壺$i$から赤玉を1個取り出す確率．

$$P(D|H_1) = \frac{2}{5}, P(D|H_2) = \frac{3}{5}, P(D|H_2) = \frac{4}{5}$$

$P(H_i)$：壺$i$が選ばれる確率（問題では与えられていない）

→「理由不十分の原則」に基づき等確率とする．

$$P(H_1) = P(H_2) = H(H_3) = \frac{1}{3}$$

上記の確率を用いて目的の確率分布が求まる．



$$P(H_1|D) = \frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}} = \frac{2}{9}$$

$$P(H_2|D) = \frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_3|D) = \frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}} = \frac{4}{9}$$

以上より，取り出した玉が赤玉であったとき，壺の中の赤玉が2個である確率＝2/9，3個である確率＝3/9，4個である確率＝4/9である．



問題4（10点）

4つのドア（A，B，C，D）があり，どれかに賞金が隠されている．回答者が一つのドア（A）を選んだ．出題者が残りのドアから，はずれのドア（C）を開けた．

回答者は

①ドアAのままにする．

②ドアBを選び直す．

という2通りを選択できる．①，②のどちらが賞金を獲得する確率が高いか？

＊ベイズの定理により，①及び②の方法で賞金を獲得する確率を求めて比較すること．



＜解答例＞

事象A　ドアAが当たり

事象B　ドアBが当たり

事象D　ドアDが当たり

事象CE　ドアCを開く

求める確率

$P(A|C_E), P(B|C_E), P(D|C_E)$ のいずれが高くなるかを調べる

ベイズの定理より

$$P(A|C_E) = \frac{P(C_E|A)P(A)}{P(C_E|A)P(A) + P(C_E|B)P(B) + P(C_E|D)P(D)}$$

$$P(B|C_E) = \frac{P(C_E|B)P(B)}{P(C_E|A)P(A) + P(C_E|B)P(B) + P(C_E|D)P(D)}$$

$P(D|C_E)$も同様に表される．



$P(A) = P(B) = P(D) = 1/4$･･･はじめは情報がない

$P(C_E|A) = 1/3$　･･･　Aが当たりであれば，はずれはB，C，DであるからCを開く確率は1/3

$P(C_E|B) = P(C_E|D) = 1/2$　･･･B（D）が当たりであれば，はずれはC，D（B，C）であるから，Cを開く確率は1/2

$$P(A|C_E) = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$P(B|C_E) = P(D|C_E) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}} = \frac{3}{8}$$

$P(A|C_E) = 1/4 < P(B|C_E) = 3/8$より，ドアBまたはDを選び直すほうが当たる確率が高くなる．

問題5（5点×3＝15点）

3人の治験者を抽出し，新薬の効用を調べたところ，2人には効き，1人には効かないことが分かった．1人の治験者に新薬が効く確率を$\theta$としたとき，以下の問に答えよ．

1. 新薬が効く確率$\theta$の分布を式で表せ．
2. $\theta$の分布の概略図を示せ．
   $\theta=0,1$における事後分布の値，及び，事後分布の最大値とそのときの$\theta$の値を付記すること．
3. $0.5\le\theta\le1$に対する確率を求めよ．

＊計算過程を示すこと．

13

＜解答例＞

■ベイズ統計の母数
抽出した1人の治験者に新薬が効く確率$\theta$

■尤度：$f(D|\theta)$
「効く確率」$\theta$のもとで，データ$D$（3人のうち2人に効き，1人に効かない）の起こる確率（二項分布より求まる）

$$f(D|\theta)={}_3C_2\theta^2(1-\theta)^1, 0\le\theta\le1$$

■事前分布：$\pi(\theta)$
治験するまでは効く確率$\theta$に関する情報はないので，理由不十分の原則より全ての可能性は均等であるとする．

$$\pi(\theta)=k$$

$0\le\theta\le1$であり，確率の総和（面積）＝1より，
事前分布　$\pi(\theta)=1, 0\le\theta\le1$

14

■事後分布：$\pi(\theta|D)$

ベイズ統計の基本公式より
事後分布∝尤度×事前分布

$$\pi(\theta|D)\propto{}_3C_2\theta^2(1-\theta)^1\times1\propto\theta^2(1-\theta)$$

$\pi(\theta|D)$の積分＝1より，

$$\int_0^1 k\theta^2(1-\theta)d\theta=\frac{k}{12}=1\rightarrow k=12$$

$$\pi(\theta|D)=12\theta^2(1-\theta)$$

15

（まとめ）

1. 分布の式　　$\pi(\theta|D)=12\theta^2(1-\theta)$

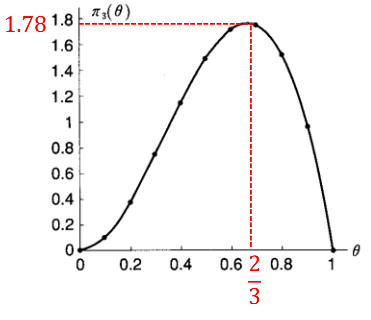
2. 分布の概略図　次頁

3. $0.5\le\theta\le1$に対する確率

$$P(0.5\le\theta\le1)=\int_{0.5}^1 12\theta^2(1-\theta)d\theta=\frac{11}{16}=0.688$$

16

事後分布$\pi_3(\theta)$の概略図




17

## 成績集計

| 小テスト1 30 | 小テスト2 40 | 中間 40 | 期末 55 | 総合 100 | 合否 |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 30 | 37 | 37 | 87.4 | ○ |
| $a_1$ | $a_2$ | $b$ | $c$ | $x$ | 再試 × |

$$x=\left(\frac{a_1}{30}+\frac{a_2}{40}\right)\times15+b\times\frac{30}{40}+c\times\frac{40}{55}+\alpha$$

18