

平成28年度後期  
工学部・情報工学科

**情報理論**  
期末試験(木曜2限クラス)  
(問題と解答例／60点満点)

2017.1.19

(注意事項)

- 教科書、資料等の持ち込み不可。電卓専用機使用可。
- 解答は分数または小数(有効数字3桁以内)で示すこと。  
<問題用紙は持ち帰ってください>

1

**問題1(5点 × 2 = 10点)**

4ビット分の雑音が混入しても

- (a)誤り検出可能
- (b)誤り訂正可能

であるための符号語間の最小ハミング距離(偶数)を求めるよ。(a), (b)に対して各々最小距離を求めること。

2

**<解答例>**

符号間の最小距離( $n$ )が偶数であるから、

$$n = 2b$$

・誤り検出可能

$$2b - 1 = 4 \rightarrow b = \frac{5}{2} \rightarrow 3, \quad \text{最小距離} = 2b = 6$$

・誤り訂正可能

$$b - 1 = 4 \rightarrow b = 5, \quad \text{最小距離} = 2b = 10$$

3

**問題2(5点 × 2 = 10点)**

次に示す長さ15の符号語(情報ビット=10, 検査ビット=5)の三角形符号について以下の間に答えよ。

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 1 & 1 & p_3 \\ 1 & p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}$$

(1)送信側で付加する検査ビット $p_1 \sim p_5$ を求めよ。  
(1, 0を用いた排他的論理和も示すこと)

(2)受信側で $y_i$ を計算したところ、下記のようになつた。

$$(a) y_2 = 1, y_5 = 1, y_i = 0, i \neq 2, 5$$

$$(b) y_4 = 1, y_i = 0, i \neq 4$$

1ビットの誤りが発生した箇所を $x_{ij}$ または $p_i$ で答えよ。

(注意)(a)と(b)に対する答えは別々に求める。

4

**<解答例>**

(1)

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\ p_2 &= 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \\ p_3 &= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \\ p_4 &= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ p_5 &= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 1 & 1 & p_3 \\ 1 & p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

排他的論理和が書かれていない場合は減点(-2点)

5

$$(2a) y_2 = 1, y_5 = 1$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & p_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & p_2 & \leftarrow y_2 \\ x_{31} & x_{32} & p_3 & & \\ x_{41} & p_4 & & & \\ p_5 & & & & \end{bmatrix} y_5$$

$y_2$ と $y_5$ の双方に含まれる情報ビットは $x_{21}$ である。

$$(2b) y_4 = 1$$

1個の $y_i$ に含まれているビットは検査ビットであるから、 $y_4$ に含まれている $p_4$ に誤りがある。

6

問題3(5点×4=20点)

ハミング符号において、 $n = 6, k = 3$ とし、情報ビットを $x_1 \sim x_3$ 、検査ビットを $c_1 \sim c_3$ 、符号語を $w = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$ とする。 $c_1 \sim c_3$ を $x_1 \sim x_3$ の排他的論理和により、次のように表す。

$$c_1 = x_1 \oplus x_2, c_2 = x_2 \oplus x_3, c_3 = x_1 \oplus x_3$$

- (1) シンドローム $s_1 \sim s_3$ を $x_1 \sim x_3, c_1 \sim c_3$ の排他的論理和で表せ。
- (2)  $w = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$ において、誤りが生じているビットとそれに対する $(s_1, s_2, s_3)$ を求めよ。
- (3) 情報ビット $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ に対する符号語 $w = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$ を求めよ。
- (4)  $(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ を受信した。誤り検出を行い、誤りがあれば訂正せよ。

7

<解答例>

(1)

$$\begin{aligned}s_1 &= x_1 \oplus x_2 \oplus c_1 \\s_2 &= x_2 \oplus x_3 \oplus c_2 \\s_3 &= x_1 \oplus x_3 \oplus c_3\end{aligned}$$

(2) 誤りビット シンドローム

	$s_1$	$s_2$	$s_3$
誤り無し	0	0	0
$x_1$	1	0	1
$x_2$	1	1	0
$x_3$	0	1	1
$c_1$	1	0	0
$c_2$	0	1	0
$c_3$	0	0	1

8

(3) 情報ビット $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$

$$\begin{aligned}c_1 &= x_1 \oplus x_2 = 1 \oplus 0 = 1 \\c_2 &= x_2 \oplus x_3 = 0 \oplus 1 = 1 \\c_3 &= x_1 \oplus x_3 = 1 \oplus 1 = 0 \\w &= (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) \\&= (1, 0, 1, 1, 1, 0)\end{aligned}$$

(4)  $w = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 0, 1, 1, 0)$

$$\begin{aligned}s_1 &= x_1 \oplus x_2 \oplus c_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\s_2 &= x_2 \oplus x_3 \oplus c_2 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \\s_3 &= x_1 \oplus x_3 \oplus c_3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1\end{aligned}$$

$(s_1, s_2, s_3) = (0, 1, 1)$ であるから、(2)の結果より

$x_3$ に誤りがある。 $x_3$ を0→1に訂正する。

訂正→ $w = (1, 0, 1, 1, 1, 0)$

9

問題4(5点×2=10点)

巡回符号に関して以下の間に答えよ。但し、 $n = 7, k = 4$ 、生成多項式 $G(x) = x^3 + x + 1$ とする。

以下に示す情報ビット(a), (b)に対する符号語を求めよ。但し、次の手順で計算し、その計算過程も示すこと。割り算の計算過程も示すこと。

情報ビット $\rightarrow p(x) \rightarrow x^3 p(x) \rightarrow G(x)$ で割る $\rightarrow$ 余り $R(x)$   
 $\rightarrow$ 符号多項式 $F(x) \rightarrow$ 符号語

- (a)  $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (0 1 0 1)$
- (b)  $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (1 1 0 1)$

10

(a)  $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (0 1 0 1)$

$$\begin{aligned}p(x) &= 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 \\&= x^2 + 1\end{aligned}$$

$$x^3 p(x) = x^5 + x^3$$

$$R(x) = x^2$$

$$\begin{aligned}F(x) &= x^3 p(x) + R(x) \\&= x^5 + x^3 + x^2\end{aligned}$$

$$w = (0 1 0 1 1 0 0)$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \hline x^5 + x^3 + x^2 \\ \hline x^5 + x^3 + x^2 \\ \hline x^2 \end{array}$$

11

(b)  $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (1 1 0 1)$

$$\begin{aligned}p(x) &= 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 \\&= x^3 + x^2 + 1\end{aligned}$$

$$x^3 p(x) = x^6 + x^5 + x^3$$

$$R(x) = 1$$

$$F(x) = x^3 p(x) + R(x)$$

$$= x^6 + x^5 + x^3 + 1$$

$$w = (1 1 0 1 0 0 1)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + x^2 \\ \hline x^4 + x^3 + x^2 \\ \hline x^4 + x^2 + x \\ \hline x^3 + x \end{array}$$

$$x^3 + x + 1$$

12

問題5(5点×2=10点)

巡回符号に関して以下の間に答えよ. 但し,  $n = 7, k = 4$ , 生成多項式  $G(x) = x^3 + x + 1$  とする.

受信側で以下に示す符号語(a), (b)を受信した. 誤り(1bit)を含むかどうか調べよ. また, 誤りがある場合はどのビットが誤っているか調べ, 訂正後の符号語を示せ.  
計算過程を示すこと. 割り算の計算も示すこと.

$$(a) (d_3 \ d_2 \ d_1 \ d_0 \ c_2 \ c_1 \ c_0) = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)$$

$$(b) (d_3 \ d_2 \ d_1 \ d_0 \ c_2 \ c_1 \ c_0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)$$

(参考) 余り関数			誤りビット			
誤りビット	$e_2$	$e_1$	$e_0$	$d_2$	$d_1$	
$d_3$	1	0	1	$c_2$	1	0
$d_2$	1	1	1	$c_1$	0	1
$d_1$	1	1	0	$c_0$	0	0

13

$$(a) (d_3 \ d_2 \ d_1 \ d_0 \ c_2 \ c_1 \ c_0) = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)$$

$$F'(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x$$

$$E(x) = x^2 + 1$$

$$(e_2, e_1, e_0) = (1 \ 0 \ 1)$$

$d_3$ に誤りあり

$$(1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0) \rightarrow (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 1 \\ x^2 + x + 1 ) \overline{x^6 + x^4 + x^2 + x} \\ \underline{x^6 + x^4 + x^3} \\ x^3 + x^2 + x \\ \underline{x^3 + x + 1} \\ x^2 + 1 \end{array}$$

14

$$(b) (d_3 \ d_2 \ d_1 \ d_0 \ c_2 \ c_1 \ c_0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)$$

$$F'(x) = x^6 + x^2 + 1$$

$$E(x) = 0 \text{であるから}$$

誤りなし

$$\begin{array}{r} x^3 + x + 1 \\ x^2 + x + 1 ) \overline{x^6 + x^2 + 1} \\ \underline{x^6 + x^4 + x^3} \\ x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\ \underline{x^4 + x^2 + x} \\ x^3 + x + 1 \\ \underline{x^3 + x + 1} \\ 0 \end{array}$$

15