

平成26年度後期
工学部・情報工学科

情報理論
第1回小テスト(火曜4限クラス)

問題と解答例

2014. 10. 21

1

問題1(10点満点)

三つのサイコロを同時に振るとき、目の合計が7になる確率を求めよ。

<解答例>

三つのサイコロの目の組み合わせは $6 \times 6 \times 6 = 216$
目の和が7である組み合わせは以下の15通り

1 + 1 + 5	2 + 1 + 4	3 + 1 + 3	4 + 1 + 2
1 + 2 + 4	2 + 2 + 3	3 + 2 + 2	4 + 2 + 1
1 + 3 + 3	2 + 3 + 2	3 + 3 + 1	
1 + 4 + 2	2 + 4 + 1		5 + 1 + 1
1 + 5 + 1			

目の合計が7になる確率 = $15/216 = 5/72 = 0.0694$

2

問題2(10点満点)

二つのサイコロを振ったとき、その目の和が6であり、サイコロの目も分かっていた。後日、そのサイコロの目を忘れてしまった。このとき失われた情報量(ビット)を求めよ。

<解答例>

①目の和が6であり、目の組み合わせも分かっている(1通りである)事象

確率: $p_1 = 1/36$

自己情報量: $I_1 = -\log_2 p_1 = 5.17[\text{bit}]$

②目の和が6であり、目の組み合わせが不明である事象
目の和が6の組み合わせ = (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)

確率: $p_2 = 5/36$

自己情報量: $I_2 = -\log_2 p_2 = 2.85[\text{bit}]$

③失われた情報量: $I = I_1 - I_2 = 2.32[\text{bit}]$

5

問題3(10点満点)

あるイベントの入場者数は40,000人であった。その内訳は以下のようになっていた。結合エントロピーを求めよ。

(世代別)

30才未満: 25,000人, 31才以上: 15,000人

(地域別)

関東圏: 30,000人, 関東圏以外: 10,000人

(ヒント)

事象 a_1 : 30才未満, 事象 a_2 : 31才以上, 事象 b_1 : 関東圏, 事象 b_2 : 関東圏外としたとき, 結合事象 (a_1, b_1) , (a_1, b_2) , (a_2, b_1) , (a_2, b_2) の確率を求め, 結合エントロピーの式に代入する。

7

<解答例>

事象 a_1 : 30才未満 $p_{a1} = 25/40 = 5/8$

事象 a_2 : 31才以上 $p_{a2} = 15/40 = 3/8$

事象 b_1 : 関東圏 $p_{b1} = 30/40 = 3/4$

事象 b_2 : 関東圏外 $p_{b2} = 10/40 = 1/4$

結合事象の確率

$$(a_1, b_1) \rightarrow p_{11} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{32}$$

$$(a_1, b_2) \rightarrow p_{12} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{32}$$

$$(a_2, b_1) \rightarrow p_{21} = \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$$

$$(a_2, b_2) \rightarrow p_{22} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

8

これらの確率を結合エントロピーの式に代入する。

$$H(A) = - \sum_{i,j=1}^2 p_{ij} \log_2 p_{ij}$$

$$= - \frac{15}{32} \log_2 \frac{15}{32} - \frac{5}{32} \log_2 \frac{5}{32} - \frac{9}{32} \log_2 \frac{9}{32} - \frac{3}{32} \log_2 \frac{3}{32}$$

$$= 1.77 [\text{bit}]$$

9

問題4(10点満点)

2人の学生の20科目の成績を以下に示す。2人の成績のエントロピー $H(A), H(B)$ を求めよ。さらに、2人のエントロピーの値の違いについて考察せよ(エントロピーの意味と成績分布に基づいて違いを説明する)

成績	S	A	B	C
A君	5	4	5	6
B君	2	14	3	1

(参考)

$$\log_2 3 = 1.58, \quad \log_2 5 = 2.32, \quad \log_2 7 = 2.81$$

11

<解答例>

A君の成績の確率

$$p(S) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \quad p(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$p(B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \quad p(C) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

B君の成績の確率

$$p(S) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}, \quad p(A) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$p(B) = \frac{3}{20}, \quad p(C) = \frac{1}{20}$$

これらの確率をエントロピーの式に代入する。

12

$$H(A) = - \sum_{x=S,A,B,C} p(x) \log_2 p(x)$$

$$= -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{3}{10} \log_2 \frac{3}{10}$$

$$= 1.99 \text{ [bit]}$$

$$H(B) = - \sum_{x=S,A,B,C} p(x) \log_2 p(x)$$

$$= -\frac{1}{10} \log_2 \frac{1}{10} - \frac{7}{10} \log_2 \frac{7}{10} - \frac{3}{20} \log_2 \frac{3}{20} - \frac{1}{20} \log_2 \frac{1}{20}$$

$$= 1.32 \text{ [bit]}$$

A君の成績のほうがB君の成績よりもエントロピーが高い。

13

<エントロピーの違いの説明>

エントロピーは曖昧(不確実)さを表している。従って、エントロピーが高いほど、予測や推定が難しい。

A君の成績はS~Cがほぼ同じであり、ある科目の成績を推定(予測)することが難しいので、曖昧さが大きいと言える。一方、Bの成績はAに集中しており、ある科目の成績はAであると推定できるので、曖昧さが小さいと言える。

14