平成26年度後期
工学部・情報工学科

情報理論

第2回小テスト（火曜3限クラス）
問題と解答例
（44点満点）

2014．11．25

1

問題1（4点×3題＝12点）

記号0,1の系列を発生する2重マルコフ情報源の状態遷移確率が次のように与えられている．以下の問に答えよ．

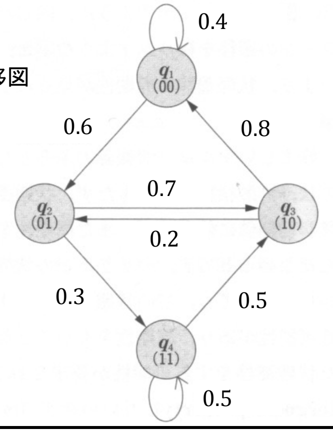
$$
\begin{aligned}
p(0|00) &= 0.4, & p(1|00) &= 0.6 \\
p(0|01) &= 0.7, & p(1|01) &= 0.3 \\
p(0|10) &= 0.8, & p(1|10) &= 0.2 \\
p(0|11) &= 0.5, & p(1|11) &= 0.5
\end{aligned}
$$

（1）状態遷移図を図示せよ（状態遷移確率も付記）．
（2）各状態の定常確率$P(00), P(01), P(10), P(11)$を求めよ（分数として求めよ）．
（3）情報源のエントロピーを求めよ（有効数字3桁の小数で表せ）．

2

＜解答例＞

（1）状態遷移図



3

（2）定常確率$P(00), P(01), P(10), P(11)$

$$
\begin{aligned}
&P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1 \cdots (1) \\
&P(00) = 0.4P(00) + 0.8P(10) \cdots (2) \\
&P(01) = 0.6P(00) + 0.2P(10) \cdots (3) \\
&P(10) = 0.7P(01) + 0.5P(11) \cdots (4) \\
&P(11) = 0.3P(01) + 0.5P(11) \cdots (5)
\end{aligned}
$$

式（1）と式（2）～（5）の内の3つの方程式を連立させて解く．結果は次のようになる．

$$P(00) = \frac{20}{59}, P(01) = \frac{15}{59}, P(10) = \frac{15}{59}, P(11) = \frac{9}{59}$$

4

（3）情報源のエントロピー

$$
\begin{aligned}
H(S) = H(0.4)P(00) + H(0.3)P(01) + H(0.2)P(10) \\
+ H(0.5)\,P(11)
\end{aligned}
$$

（2）の結果と与えられたエントロピー数値（最後の頁）より，次のように求まる．

$$
\begin{aligned}
H(s) = 0.971 \times \frac{20}{59} + 0.881 \times \frac{15}{59} + 0.722 \times \frac{15}{59} \\
+1 \times \frac{9}{59} = 0.889\ [bit]
\end{aligned}
$$

5

問題2（10点）

$a_1 = 0, a_2 = 1$の生起確率が$p_1 = 0.38, p_2 = 0.62$である2元対称通信路において，誤り率が$\varepsilon = 0.1$であるときの伝送情報量を求めよ．

6

＜解答例＞

伝送情報量

$I(A;B) = H(v) - H(\varepsilon)$ [bit/記号]

$p = 0.38, \quad \varepsilon = 0.1$

$v = p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon)$
$= 0.38 \times 0.1 + (1 - 0.38) \times (1 - 0.1)$
$= 0.596$

$I(A;B) = H(v) - H(\varepsilon)$
$= H(0.6) - H(0.1) = H(0.4) - H(0.1)$
$= 0.971 - 0.469 = 0.502$ [bit/記号]

問題3（5点×2題＝10点）
伝送情報量と通信路容量の違いについて説明せよ．

＜解答例＞

- ◆ 伝送情報量
  送信記号と受信記号の相互情報で定義される．
  送信側の記号（0，1）の生起確率pと通信路における誤り率εで決まる．

- ◆ 通信路容量
  伝送情報量において，pを調整して$(P = 0.5)$，伝送情報量を最大としたものである．
  送信記号の統計的な性質には依存せず，通信路として伝送できる最大の情報量を表す．

問題4（4点×3題＝12点）

2元対称通信路の伝送情報量は次式で与えられる．

$I(A;B) = H\big(p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon)\big) - H(\varepsilon)$ [bit/記号]

以下の問に答えよ．
（1）$p = 1/2$のときの$I(A;B)$を求めよ．
（2）$I(A;B)$の最大値とそのときのεを求めよ．さらに，最大値とεの関係を定性的に説明せよ．
（3）$I(A;B)$の最小値とそのときのεを求めよ．さらに，最小値とεの関係を定性的に説明せよ．

＜解答例＞

（1）$p = 1/2$のとき$p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon) = 1/2$となるから
$I(A;B) = H(1/2) - H(\varepsilon) = 1 - H(\varepsilon)$

（2）$I(A;B) = 1 - H(\varepsilon)$において，$0 \le H(\varepsilon) \le 1$であるから，$H(\varepsilon) = 0$のときに$I(A;B)$は最大値＝1となる．
$H(\varepsilon) = 0$ となるのは$\varepsilon = 0, 1$のときである．

＜$I(A;B)$の最大値とεの関係＞
$\varepsilon = 0 (\varepsilon = 1)$のときは，誤りなし（完全に誤る）なので，例えば，0を受信した場合は0（1）が送信されたと判断できる．従って，送信記号が100%（$I(A;B) = 1$）送られたことになる．

（3）$I(A;B) = 1 - H(\varepsilon)$において，$H(\varepsilon)$ =1のときに$I(A;B)$は最小値＝0となる．$H(\varepsilon)$ =1となるのは$\varepsilon = 0.5$のときである．

＜$I(A;B)$の最小値とεの関係＞
$\varepsilon = 0.5$のときは，例えば，0を送信すると同じ確率で0と1が受信される．言い換えると0を受信しても，0が送信されたか，1が送信されたか全く不明である．すなわち，送信記号は全く送られていない（$I(A;B) = 0$）ことになる．

（参考）エントロピー関数の値

$H(0) \quad = 0$
$H(0.1) = 0.469$
$H(0.2) = 0.722$
$H(0.3) = 0.881$
$H(0.4) = 0.971$
$H(0.5) = 1$

近い値を用いる例
$p = 0.39$に対しては，$H(p) = H(0.4) = 0.971$
を用いる．

エントロピー関数は$p = 0.5$に関して対称である．
$H(p) = H(1-p)$