平成28年度後期
工学部・情報工学科

情報理論

第2回小テスト（木曜2限クラス）

問題と解答例（50点満点）

2016．11．24

（注意事項）
- 教科書，資料等の持ち込み不可．電卓専用機使用可．
- 計算過程を示すこと．
- エントロピーは電卓で計算するか，参考ページの数値（近い値）を用いること．
- 解答は分数または小数（有効数字3桁）で示すこと．

＜問題用紙は持ち帰ってください＞

1

問題1（5点×2題＝10点）

次の時系列について以下の問に答えよ．

011010001011010

（1）状態10の定常確率$P(10)$を求めよ．
（2）状態遷移確率$p(0|01)$を求めよ．

（ヒント）
（1）上の時系列において2ビットからなる状態の総数は14通りである．時系列中の10の状態の数をnとすると，$P(10)=n/14$である．
（2）$p(0|01)$における状態遷移は01の状態から次に0が発生する場合であるから，010が該当する．上の時系列において状態遷移の総数は13通りである．時系列中の010の数をmとすると，$p(0|01)=m/13$である．

2

＜解答例＞

011010001011010

（1）上記の時系列で状態10は5通りあるので，

$$P(10)=\frac{5}{14}=0.357$$

（2）上記の時系列で010の状態は3通りあるので，

$$p(0|01)=\frac{3}{13}=0.231$$

3

問題2（5点×3題＝15点）

記号0，1の系列を発生する2重マルコフ情報源の状態遷移確率が次のように与えられている．以下の問に答えよ．

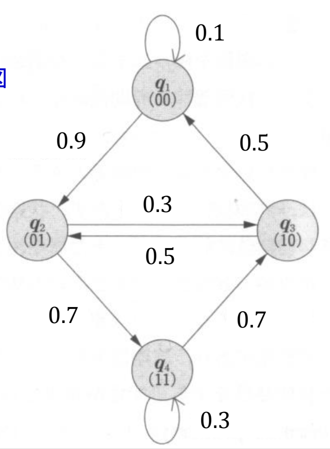
$$p(0|00)=0.1,\quad p(1|00)=0.9$$
$$p(0|01)=0.3,\quad p(1|01)=0.7$$
$$p(0|10)=0.5,\quad p(1|10)=0.5$$
$$p(0|11)=0.7,\quad p(1|11)=0.3$$

（1）状態遷移図を図示せよ（状態遷移確率も付記）．
（2）各状態の定常確率$P(00),P(01),P(10),P(11)$を求めよ（分数として求めよ）．
（3）情報源のエントロピーを求めよ（有効数字3桁の小数で表せ）．

4

＜解答例＞

（1）状態遷移図



5

（2）定常確率を求める方程式

$$P(00)+P(01)+P(10)+P(11)=1\cdots(1)$$
$$P(00)=0.1P(00)+0.5P(10)\cdots(2)$$
$$P(01)=0.9P(00)+0.5P(10)\cdots(3)$$
$$P(10)=0.3P(01)+0.7P(11)\cdots(4)$$
$$P(11)=0.7P(01)+0.3P(11)\cdots(5)$$

式（1）と式（2）～（5）の内の3つの方程式を連立させて解く．結果は次のようになる．

$$P(00)=\frac{5}{32},P(01)=\frac{9}{32},P(10)=\frac{9}{32},P(11)=\frac{9}{32}$$

6

(3)情報源のエントロピー

$$H(S) = H(0.1)P(00) + H(0.3)P(01) + H(0.5)P(10) + H(0.3)\,P(11)$$

(2)の結果と与えられたエントロピー数値(最後の頁)より，次のように求まる.

$$H(s) = 0.469 \times \frac{5}{32} + 0.881 \times \frac{9}{32} + 1 \times \frac{9}{32} + 0.881 \times \frac{9}{32} = 0.850\ [bit]$$

7

問題3(10点)

2元対称通信路において，誤り率が$\varepsilon = 1/9$であるときの記号単位の通信路容量C [bit/記号]を求めよ.

8

<解答例>

2元対称通信路における記号単位の通信路容量は

$$C = H(1/2) - H(\varepsilon) = 1 - H(\varepsilon), p = 1/2 \quad [bit/記号]$$

であるから，$\varepsilon = \dfrac{1}{9} = 0.111 \cong 0.1$　より

$$C = 1 - H(0.1) = 1 - 0.469 = 0.531\ [bit/記号]$$

9

問題4(5点×3題=15点)

2元対称通信路の伝送情報量は次式で与えられる.

$$I(A;B) = H\big(p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon)\big) - H(\varepsilon) \quad [bit/記号]$$

以下の問に答えよ.
(1)$p = 1/2$のときの$I(A;B)$を求めよ.
(2)$I(A;B)$の最大値とそのときのεを求めよ. さらに，最大値とεの関係を定性的に説明せよ.
(3)$I(A;B)$の最小値とそのときのεを求めよ. さらに，最小値とεの関係を定性的に説明せよ.

10

<解答例>

(1)
$p = 1/2$のとき$p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon) = 1/2$となるから

$$I(A;B) = H(1/2) - H(\varepsilon) = 1 - H(\varepsilon)$$

(2)
$I(A;B) = 1 - H(\varepsilon)$において，$0 \le H(\varepsilon) \le 1$であるから，
$H(\varepsilon) = 0$のときに$I(A;B)$は最大値=1となる.
$H(\varepsilon) = 0$ となるのは$\varepsilon = 0, 1$のときである.

<$I(A;B)$の最大値とεの関係>
$\varepsilon = 0 (\varepsilon = 1)$のときは，誤りなし(完全に誤る)なので，例えば，0を受信した場合は0(1)が送信されたと判断できる. 従って，送信記号が100%($I(A;B) = 1$)送られたことになる.

11

(3)
$I(A;B) = 1 - H(\varepsilon)$において，$H(\varepsilon)$ =1のときに$I(A;B)$は最小値=0となる. $H(\varepsilon)$ =1となるのは$\varepsilon = 0.5$のときである.

<$I(A;B)$の最小値とεの関係>
$\varepsilon = 0.5$のときは，例えば，0を送信すると同じ確率で0と1が受信される. 言い換えると0を受信しても，0が送信されたか，1が送信されたか全く不明である. すなわち，送信記号は全く送られていない($I(A;B) = 0$)ことになる.

12

（参考）エントロピー関数の値

$H(0) = 0$
$H(0.05) = 0.286$
$H(0.1) = 0.469$
$H(0.15) = 0.610$
$H(0.2) = 0.722$
$H(0.25) = 0.811$
$H(0.3) = 0.881$
$H(0.35) = 0.934$
$H(0.4) = 0.971$
$H(0.45) = 0.993$
$H(0.5) = 1$

近い値を用いる例
$p = 0.39$に対しては,
$H(p) = H(0.4) = 0.971$
を用いる.

エントロピー関数は$p = 0.5$に関して対称である.

$$H(p) = H(1-p)$$

13