

情報理論
第3回小テスト(火曜4限クラス)
(問題と解答例/60点満点)

2014.12.20

(注意事項)

- 教科書, 資料等の持ち込み不可. 電卓専用機使用可.
- 対数については電卓で計算するか, 問題に付記された数値を使用すること.
- 解答は分数または小数(有効数字3桁)で示すこと.

1

問題1(5点×2題=10点)

次の符号について以下の可能性を調べよ.

- (a)一意復号の可能性
- (b)瞬時復号の可能性

$$\begin{aligned}A &= 0 \\B &= 10 \\C &= 110\end{aligned}$$

(調べる方法)

010110を受信したとき, これを A, B, C に一意復号可能であるか/瞬時復号可能であるかを調べる.

答えは可能/不可能とその理由を述べること.

2

<解答例>

(a)一意復号の可能性

010110を受信したとする. この復号は次のビット分割に限られる.

$$010110 \rightarrow 0 - 10 - 110 \rightarrow A - B - C$$

上記以外のビット分割を考えてみる. 例えば,

$$010110 \rightarrow 01 - 0 - 110$$

と分割した場合, 01, 0に対応する符号がないので復号化出来ない.

3

(b)瞬時復号の可能性

010110を受信したとする.

この符号の特徴は最後が「0」で終わることである. すなわち, 「0」は符号の最後を表しているので, 「0」を受信した時点で符号を区切ることが出来る.

従って,

- 1ビット目の「0」を受信した段階で A と判定できる.
- 2, 3ビット目の「10」を受信した段階で B と判定できる.
- 4~6ビット目の「110」を受信した段階で C と判定できる.

このように, 次の符号のビットを見ることなく復号できるため, 瞬時復号は可能である.

4

問題2(5点×2題=10点)

次の情報源について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0.05 & 0.55 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

(1)シャノン-ファノ符号と効率 e を求めよ.

(2)ハフマン符号と効率 e を求めよ.

(参考)

$$\begin{aligned}\log_2 0.05 &= -4.32, & \log_2 0.1 &= -3.32 \\ \log_2 0.3 &= -1.74, & \log_2 0.55 &= -0.863\end{aligned}$$

5

<解答例>

(1)シャノン・ファノの符号化

確率の順に並べる

$$\begin{array}{cccc}A_2 & A_4 & A_3 & A_1 \\ 0.55 & 0.3 & 0.1 & 0.05\end{array}$$

確率が等しくなるように分割

$$\begin{array}{cccc}(A_2) & (A_4 & A_3 & A_1) \\ 0.55 & 0.3 + 0.1 + 0.05 & = & 0.45\end{array}$$

第2項を確率が等しくなるように分割

$$\begin{array}{ccc}(A_4) & (A_3 & A_1) \\ 0.3 & 0.1 + 0.05 & = 0.15\end{array}$$

第3項を分割する.

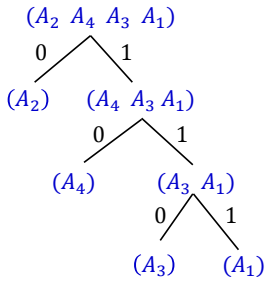
$$\begin{array}{cc}(A_3) & (A_1) \\ 0.1 & 0.05\end{array}$$

6

以上をツリーで表す.

符号化
 A_2 0
 A_4 10
 A_3 110
 A_1 111

(0,1を逆)
 A_2 1
 A_4 01
 A_3 001
 A_1 000



7

効率

$$H = - \sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i = 1.54$$

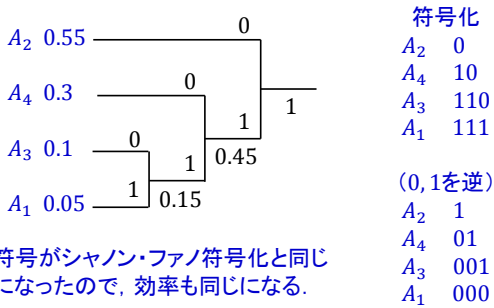
$$L = \sum_{i=1}^4 g_i p_i = 1.60, \quad g_i : \text{各記号の符号長}$$

$$e = \frac{H}{L} = \frac{1.54}{1.60} = 0.965$$

8

(2)ハフマン符号

記号を確率の大きい順に並べる.
 確率が最も小さい2つを組み合わせる.



符号がシャノン・ファノ符号化と同じ
 になったので、効率も同じになる.

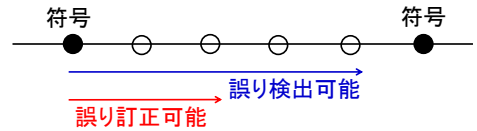
9

問題3(5点×2題=10点)

符号語間の最小のハミング距離が5である場合,

- (a)誤り検出可能
 (b)誤り訂正可能
 なハミング距離(ビット数)を求めよ.

<解答例>



符号間最小距離=5ビット($n = 2b + 1, b = 2$)

誤り検出可能な距離=4ビット($2b$)

誤り訂正可能な距離=2ビット(b)

10

問題4(5点×2題=10点)

3ビット分の雑音が入り混じっても

- (a)誤り検出可能
 (b)誤り訂正可能

であるための符号語間の最少ハミング距離(奇数)を求めよ.

<解答例>

符号間の最小距離が奇数(n)が奇数であるから,
 $n = 2b + 1$

- 誤り検出可能
 $2b = 3 \rightarrow b = 1.5 \rightarrow 2$, 最小距離 = $2b + 1 = 5$
- 誤り訂正可能
 $b = 3$, 最小距離 = $2b + 1 = 7$

11

問題5(5点×2題=10点)

長方形符号が次式で与えられている. 以下の間に答えよ.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & p_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \end{bmatrix}$$

- (1) $p_1 \sim p_4, q_1 \sim q_5$ を求めよ.
 (2) 受信した符号 Y' において, 第4行が $[0 \ 1 \ 1 \ 0 \ p_4]$ となった. Y' における $y_1 \sim y_4, z_1 \sim z_5$ を求めよ.
 ただし, p_4 に誤りはないものとする.

12

<解答例>

(1) p_i は第*i*行の情報ビットの排他的論理和, z_j は第*j*列の情報ビットの排他的論理和, q_5 は $p_1 \sim p_4$ の排他的論理和であるから, 次のように求まる.

$$\begin{aligned} p_1 = 1, & \quad p_2 = 0, & \quad p_3 = 0, & \quad p_4 = 1 \\ q_1 = 0, & \quad q_2 = 1, & \quad q_3 = 1, & \quad q_4 = 0, & \quad q_5 = 0 \end{aligned}$$

(2) y_i, z_j は送信時は全て0である. 受信側では, 第4行第2列に誤り(0 → 1)が発生している. これを含む y_i, z_j が1となり, 他は0のままである. y_i, z_j は次のようになる.

$$\begin{aligned} y_1 = 0, & \quad y_2 = 0, & \quad y_3 = 0, & \quad y_4 = 1 \\ z_1 = 0, & \quad z_2 = 1, & \quad z_3 = 0, & \quad z_4 = 0, & \quad z_5 = 0 \end{aligned}$$

13

問題6(5点×2題=10点)

次に示す長さ15の符号語(情報ビット=10, 検査ビット=5)の三角形符号について以下の問に答えよ.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & p_1 \\ 1 & 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 1 & p_3 \\ 0 & p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}$$

(1) 送信側で付加する検査ビット $p_1 \sim p_5$ を求めよ.

(2) 受信側で y_i を計算したところ, $y_2 = 1, y_3 = 1$ であった. 1ビットの誤りが情報ビットで発生しているとする. どのビットで誤りが発生したか, x_{ij} で答えよ.

14

<解答例>

(1) p_i は次式で与えられる

$$\begin{aligned} p_1 &= x_{11} \oplus x_{12} \oplus x_{13} \oplus x_{14} = 0 \\ p_2 &= x_{21} \oplus x_{22} \oplus x_{23} \oplus x_{14} = 0 \\ p_3 &= x_{31} \oplus x_{32} \oplus x_{23} \oplus x_{13} = 1 \\ p_4 &= x_{41} \oplus x_{32} \oplus x_{22} \oplus x_{12} = 1 \\ p_5 &= x_{41} \oplus x_{31} \oplus x_{21} \oplus x_{11} = 0 \end{aligned}$$

(2) y_i は送信時は全て0である. 受信側で誤りが生じると $y_i = 1$ となる. $y_2 = 1, y_3 = 1$ であることは

$$\begin{aligned} y_2 &= p_2 \oplus x_{21} \oplus x_{22} \oplus x_{23} \oplus x_{14} \\ y_3 &= p_3 \oplus x_{31} \oplus x_{32} \oplus x_{23} \oplus x_{13} \end{aligned}$$

に共通に含まれる x_{23} に誤りがある.

15