「ディジタル通信と信号処理」小テスト予想問題

入力信号を次の$x(n)$とする．

$$x(n) = c_1\cos(\omega_1 nT + \phi_1) + c_2\cos(\omega_2 nT + \phi_2)$$
$$c_1 = 2, f_1 = 500Hz, \phi_1 = \pi/4$$
$$c_2 = 0.5, f_2 = 1000Hz, \phi_2 = \pi/2$$
$$f_s = 8000Hz$$

$x(n)$を$H(z)$を伝達関数とする回路に入力し，次に示す信号$y(n)$を出力したい．以下の問に答えよ．

$$y(n) = 2\cos(\omega_2 nT + \phi_3)$$

但し，ϕ_3に対する条件はない．

今回の問題では，零点と極は式(2)と(3)で与えられる．
分子では，さらに次のように定数倍を考慮できる．

$$a_0(1 - 2r\cos(\omega_1 T)z^{-1} + r^2 z^{-2})$$
$$= a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}, r = 1 \cdots (4)$$

分母の定数項は1に限られるので，次のようになる．

$$1 - 2r\cos(\omega_2 T)z^{-1} + r^2 z^{-2}$$
$$= 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}, r = 0.9$$

(b) $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 4, f = f_2$の条件は$a_0$により満たす．
まず，式(4)において，$a_0 = 1$としてa_0, a_1, a_2を求め，これを用いて振幅を計算する．振幅がもし0.5であれば，$a_0 = 8$とすれば$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 4, at\ f = f_2$とできる．式(4)において，$a_0 = 8$として改めて$a_0, a_1, a_2$の値を計算し，これを最終的な値とする．

（設問1）次の伝達関数$H(z)$を求めよ．但し，$|H(e^{j\omega})|$は$f = f_2$付近で最大になるものとする．

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \cdots (1)$$

また，伝達関数を求める際に用いた零点と極を示せ．

＜考え方・計算方法＞
条件を満たすようにa_0, a_1, a_2, b_1, b_2を数値で求めて式(1)に代入する．

これまでの条件は次のように表される．
(a) $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 0,\ f = f_1$
(b) $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 4,$（最大値）$f = f_2$

（設問2）周波数特性$H(e^{j\omega})$の$f = f_1, f_2$における振幅と位相を求めよ．

＜考え方・計算方法＞
Excelのプログラム（前回分）を利用して計算し，その結果を答案用紙に転記する．
「全体振幅(1)」，「全体位相(1)」
「全体振幅(2)」，「全体位相(2)」

（設問3）周波数特性に基づいて出力信号$y(n)$を計算し，図示せよ．

（設問4）$H(z)$の回路を用いて時間領域で出力信号$y(n)$を計算し，図示せよ．

これらの条件は，さらに，次のように表される．
$(a)\ f = \pm f_1$において単位円上に零点を有する．

$$z_0 = e^{\pm j\omega_1 T} \cdots (2)$$

$(b)\ f = \pm f_2$において極を有する．

$$z_p = re^{\pm j\omega_2 T} \cdots (3)$$

rは問題の中で指定する．ここでは，$r = 0.9$とする．

一般的に，零点，または極が次式で表されるとき，

$$re^{\pm j\omega_0 T}$$

対応する伝達関数の分子（零点）または分母（極）は次のようになる．

$$1 - 2r\cos(\omega_0 T)z^{-1} + r^2 z^{-2}$$

＜設問（3），（4）の考え方・計算方法＞
Excelのプログラム（前回分）を利用して計算し，グラフを答案用紙に転記する．

（設問5）出力信号の定常応答において，設問（3）と（4）における$y(n)$が等しくなることを示せ．

＜考え方・計算方法＞
設問（3），（4）における出力信号$y(n)$を比較する．もし，$16 \le n \le 20$において$y(n)$の値がほぼ同じであれば，答案用紙にnの値と，そのときの設問（3），（4）における$y(n)$の値を転記し，ほぼ等しいことを示す．