確率と統計

中山クラス
第９週

本日の内容

◇第５章
5.1　統計的仮説検定の必要性
5.2　統計的仮説検定の手順と用語
5.3　標準正規分布を用いた検定
5.4　t分布を用いた検定

◇コンピュータ演習

◇第３回レポート作成

第5章　統計的仮説検定

5.1　統計的仮説検定の必要性

日本人学生の自尊感情とソーシャルスキルの関係を調べる.
50人の大学学生を無作為に抽出→データを収集→相関係数=0.5→「自尊感情とソーシャルスキルの間には相関がある」

この結果に対する妥当性の評価
「もし，母集団において全く相関性がないとしたら，標本データに基づく相関係数=0.5という結果がでる可能性は非常に低い」

確率論に基づいて，このような解析を行う→統計的仮説検定

5.2 統計的仮説検定の手順と用語

◆一般的な手順◆

1．母集団に関する帰無仮説と対立仮説を設定
2．検定統計量を選ぶ
3．有意水準αを決める
4．標本データから検定統計量の実現値を求める
5．検定統計量の実現値∈棄却域→対立仮説
∉棄却域→帰無仮説

5.2.1 帰無仮説と対立仮説

帰無仮説（H_0）

主張したいことと逆の仮説

「差がある」ことを主張したい→帰無仮説＝「差がない」

対立仮説（H_1）

帰無仮説が棄却されたときに採択される

帰無仮説＝「差がない」→対立仮説＝「差がある」

統計的仮説検定では

帰無仮説が正しいことを前提にして，得られたデータから検定統計量を計算

→この結果があり得る値　→帰無仮説を採択

→この結果があり得ない値→帰無仮説を棄却

5.2.2 検定統計量

検定統計量
標本統計量を利用

検定統計量の実現値
標本データから計算された検定統計量の値

帰無仮説に合わない場合
検定統計量は0に近い値になる

5.2.3 有意水準と棄却域

有意水準(α)

帰無仮説を棄却する基準(確率)

1%または5%に設定される場合が多い

$\alpha = 0.05$ 有意水準=5%

帰無分布

帰無仮説のもとでの標本分布

棄却域

帰無仮説のもとでは，非常に生じにくい(確率αでしか生じない)検定統計量の値の範囲

採択域

棄却域以外の範囲

境界値: 棄却域と採択域の境界

統計的仮説検定の結果の報告

検定統計量の実現値$\in$棄却域

→帰無仮説「差がない」を棄却し，対立仮説「差がある」を採択

・・・「検定結果は5%（1%）水準で有意である」

「$p < 0.05$ ($p < 0.01$)で有意差が見られた」

検定統計量の実現値$\notin$棄却域

→帰無仮説「差がない」を採択

・・・「検定結果5%（1%）水準で差が有意でない」

「$p < 0.05$ ($p < 0.01$)で有意な差が見られなかった」

（統計的に意味のある差ではない）

「有意である」→significant 「sig」と表記

「有意でない」→not significant 「ns」と表記

5.2.5～5.2.7

5.2.5 P値

帰無仮説が正しいという過程のもとで，標本から計算した検定統計量以上の値が得られる確率

$p < \alpha$のときに帰無仮説を棄却する

5.2.6 第1種の誤りと第2種の誤り

第１種の誤り：　帰無仮説が真のとき，これを棄却する誤り
誤りを起こす確率＝α

第２種の誤り：　帰無仮説が偽のとき，これを採択する誤り
誤りを起こす確率＝β

5.2.7 検定力

間違っている帰無仮説を正しく棄却できる確率

第２種の誤りを犯さない確率$(1-\beta)$

5.3 標準正規分布を用いた検定

標準正規分布$N(0,1)$を帰無分布とする1つの平均の検定を行う

検定統計量

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

正規母集団$N(\mu, \sigma^2)$からnサンプルを無作為抽出したときの標本平均$\bar{X}$の分布は$N(\mu, \sigma^2/n)$に従う

Zは$N(0,1)$に従う

平均値の検定(例題)

心理学テストの母集団分布: $X \sim N(12, 10)$

「指導法データ(p.38の表2.1)の20人の心理学テストの得点はこの母集団からの無作為抽出と考えてよいか?」

1つの平均値の検定によって確認する.

```
> 心理学テスト<-c(13, 14, 7, 12, 10, 6, 8, 15, 4, 14, 9, 6, 10, 12, 5, 12, 8, 8, 12, 15)
> 心理学テスト
 [1] 13 14  7 12 10  6  8 15  4 14  9  6 10 12  5 12  8
8 12 15
```

(1)帰無仮説と対立仮説の設定

帰無仮説$H_0: \mu = 12$（心理学テストの母平均は12である）

対立仮説$H_1: \mu \neq 12$（心理学テストの母平均は12でない）

両側検討となる

(2) 検定統計量の選択

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

(3) 有意水準αの決定

$\alpha = 0.05$　両側検定

(4) 検定統計量の実現値を求める

(5) 帰無仮説の棄却or採択の決定

(4) 検定統計量の実現値

```
> 心理学テスト<-c(13,14,7,12,10,6,8,15,4,14,9,6,10,12,5,12,
8,8,12,15)
> 心理学テスト
 [1] 13 14  7 12 10  6  8 15  4 14  9  6 10 12  5 12  8  8 12 15
  > Z分子 <- mean(心理学テスト)-12
  > Z分子
  [1] -2
  > Z分母 <- sqrt(10/length(心理学テスト))
  > Z分母
  [1] 0.7071068
  > Z統計量 <- Z分子/Z分母
  > Z統計量
  [1] -2.828427
```

(5) 帰無仮説の棄却or採択の決定

標準正規分布で，両側検定・有意水準5%の棄却域を求める

下側確率が0.05/2=0.025となるZの値を求める

```
> qnorm(0.025)
[1] -1.959964
```

上側確率が0.05/2=0.025%となるZの値を求める

```
> qnorm(0.975)
[1] 1.959964
```

棄却域： $Z<-1.959964$　　$1.959964<Z$

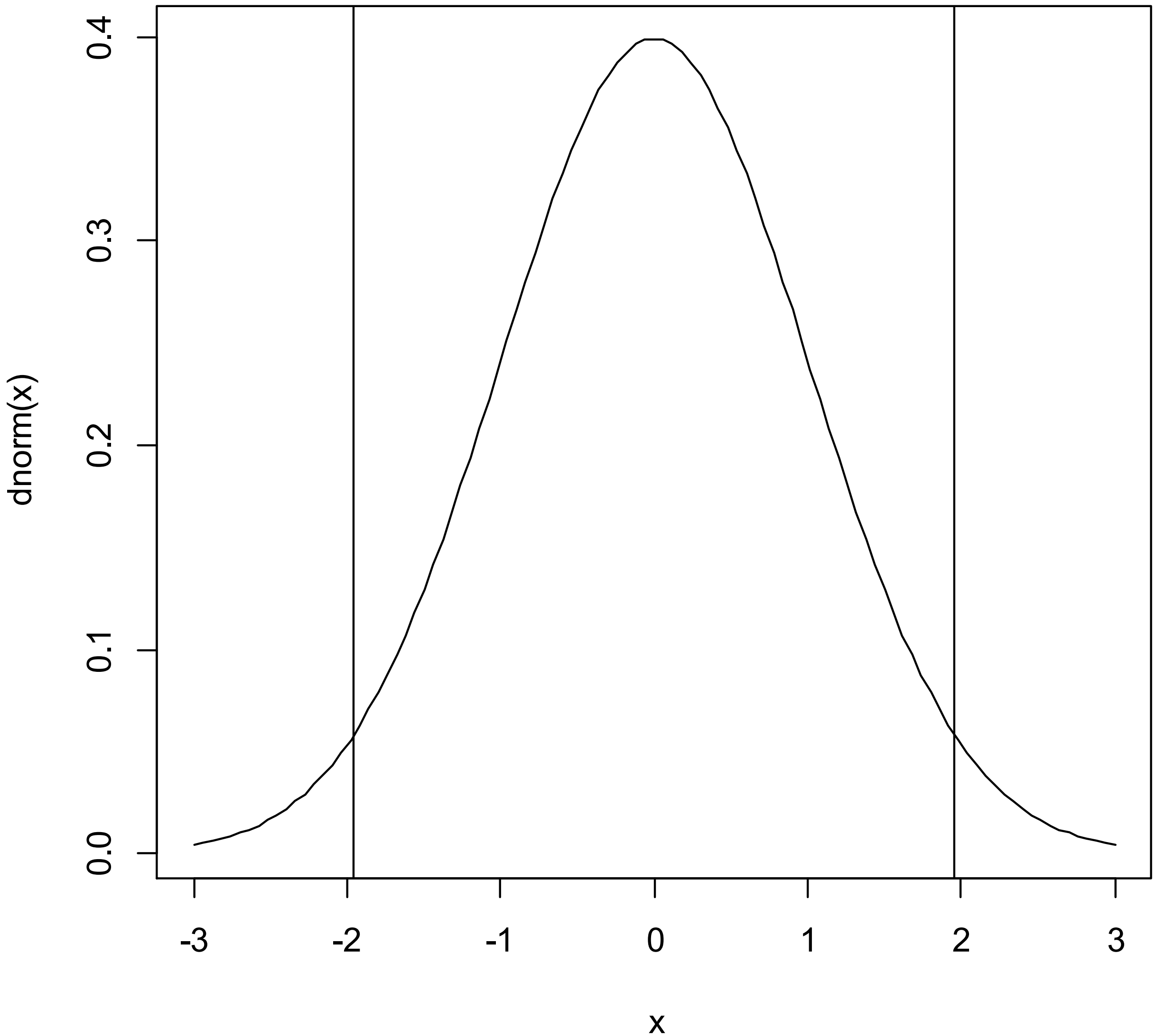
検定統計量の実現値：$Z=-2.828427<-1.959964$

→帰無仮説は棄却される.

検定結果：「5%の水準で有意であった」

20人の心理学テスト得点は母集団$N(12, 10)$からの無作為標本とは言えない

```
> curve(dnorm(x), -3, 3)
> abline(v=qnorm(0.025))
> abline(v=qnorm(0.975))
```



P値による検定

pnorm(q)　標準正規分布に従う確率変数Zがq以下となる確率

```
> pnorm(-2.828427)        #下側確率を計算
[1] 0.002338868

> pnorm(2.828427, lower.tail=FALSE)  #上側確率を計算
[1] 0.002338868

> 2*pnorm(2.828427, lower.tail=FALSE)  #両側確率を計算
[1] 0.004677737
```

下側，上側確率=0.002338868<0.025（水準）
両側確率=0.004677737<0.05（水準）
→帰無仮説は棄却される

5.4　t分布を用いた検定

正規母集団からの無作為標本
母集団の分散σ^2が不明

未知のσ^2の代わりに標本データから計算される不偏分散を用いる.

検定統計量:

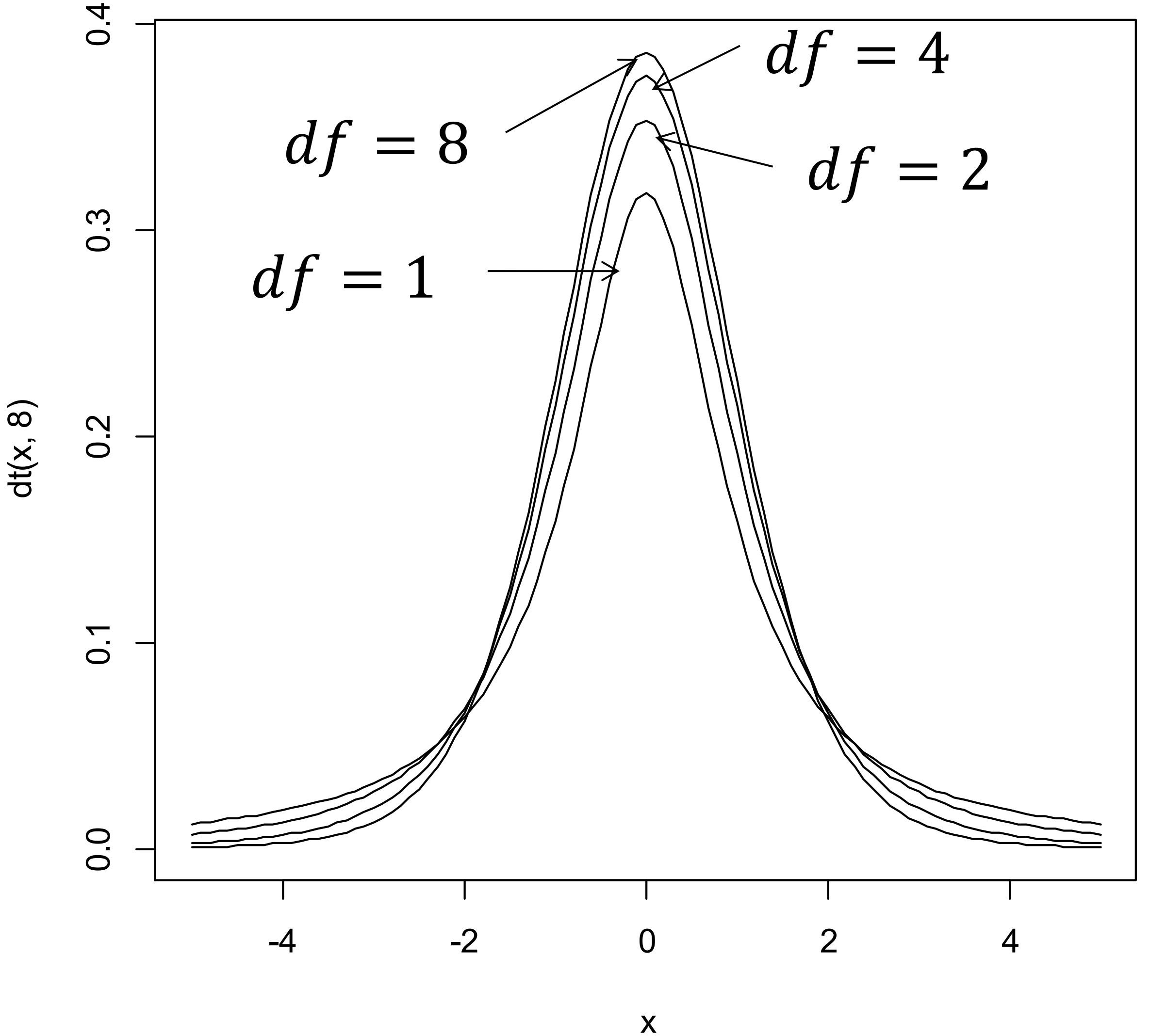
$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

$\hat{\sigma}$　不偏分散の平方根

この統計量は自由度$df = n - 1$のt分布に従う.

```
> curve(dt(x,8), -5, 5)
```
自由度8のt分布をx=-5〜5の範囲で書く

```
> curve(dt(x,4), -5, 5, add=TRUE)
> curve(dt(x,2), -5, 5, add=TRUE)
> curve(dt(x,1), -5, 5, add=TRUE)
```



t分布：標本統計量を用いた分布($\sigma \rightarrow \hat{\sigma}$)

自由度∝サンプル数

サンプル数が少ない

↓

標本統計量($\hat{\sigma}$)のばらつきが大きくなる

自由度→無限大

↓

標準正規分布

t分布を用いた検定（例題）

(1)帰無仮説と対立仮説の設定（母分散は不明）

帰無仮説$H_0: \mu = 12$

（心理学テストの母平均は12である）

対立仮説$H_1: \mu \neq 12$

（心理学テストの母平均は12ではない）両側検討

(2) 検定統計量の選択

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

(3) 有意水準αの決定

$\alpha = 0.05$ 両側検定

(4) 検定統計量の実現値を求める

```
> t分子 <- mean(心理学テスト)-12  #検定統計量の分子
> t分子
[1] -2
> t分母 <- sqrt(var(心理学テスト)/length(心理学テスト))
                                  #検定統計量の分母
> t分母
[1] 0.7643367

> t統計量 <- t分子/t分母
> t統計量
[1] -2.616648
```

(5) 帰無仮説の棄却or採択の決定

この検定統計量は帰無仮説のもとで自由度
$df = n - 1 = 20 - 1 = 19$のt分布に従う.
qt(p, df): 自由度dfのt分布で下側確率がpとなるtの値を計算

```
> qt(0.025, 19)  #自由度19のt分布で下側確率=0.025となるtの値
[1] -2.093024
> qt(0.975, 19)  #自由度19のt分布で下側確率=0.975となるtの値
[1] 2.093024
> qt(0.025, 19, lower.tail=FALSE)
                 #自由度19のt分布で上側確率=0.025となるtの値
[1] 2.093024
```

棄却域: $t < -2.093024,\ 2.093024 < t$
検定統計量の実現値$t = -2.616648 < -2.093024$
→帰無仮説は棄却される

p値による検定

pt(q, df): 自由度dfのt分布において, tの値がq以下である確率を計算・・・下側確率$Prob(t \leq q)$を計算

```
> pt(-2.616648, 19)  #自由度19のt分布で下側確率を計算
[1] 0.00848546
> pt(2.616648, 19, lower.tail=FALSE)  #上側確率を計算
[1] 0.00848546
> 2*pt(2.616648, 19, lower.tail=FALSE)  #p値を計算
[1] 0.01697092
```

p値=0.01697092＜0.05（有意水準）

→ 帰無仮説は棄却

t.test( )による検定

```
> t.test(心理学テスト, mu=12)

        One Sample t-test

data:  心理学テスト
t = -2.6166, df = 19, p-value = 0.01697
alternative hypothesis: true mean is not equal to 12
95 percent confidence interval:
  8.400225 11.599775
sample estimates:
mean of x
       10
```

演習問題

５章の練習問題（１）について，Rを用いて下記の内容を実行せよ.

（a）２０人分の身長データを適当な変数に入力せよ.
　ここでは，変数名をheightとする.
（b）t.test(height, mu=170)を実行せよ.
（c）上記の結果を答案用紙に書き写せ.
（d）この結果に基づき，２０人の身長データはある国の
　20才男性の母集団（＊）からの無作為標本と考えてよいか？判断せよ.
　（＊）平均170cmの正規分布に従う.

次回の予定

第10週

第5章　統計的仮説検定

　　５．５　相関関数の検定（無相関検定）

　　練習問題（1），（2）