

5

IIR デジタルフィルタの設計法

IIR デジタルフィルタの伝達関数はアナログフィルタから変数変換で求めることができる。本章では、まず基本的なアナログフィルタの伝達関数について説明する。次に、アナログからデジタルへの変数変換の方法としてインパルス応答不変変換と双 1 次 z 変換について述べる。さらに、基本フィルタからの変換によるフィルタ設計法を取り上げる。

5.1 デジタルフィルタの設計

5.1.1 設計フローチャート

1. 所望フィルタ特性を与える。

デジタルフィルタを応用するシステムや方式により決まる。

2. 回路形式を選択する。

主として、IIR(Infinite Impulse Response) フィルタと FIR(Finite Impulse Response) フィルタの選択を行う。

3. 所望特性を近似する伝達関数を設計する。第 5 章及び第 6 章で述べる内容。
4. 上のステップで設計した伝達関数を実現する回路を設計する。構造が簡単で規則性があり、量子化誤差の影響を受けにくい回路形式を用いる。
5. 乗算器の乗数及び内部信号における量子化誤差の影響を解析し、必要な語長(ビット数)を決める。

5.1.2 回路形式の特徴

IIR フィルタと FIR フィルタの比較を表 5.1 に示す。また、対応する回路例を図 5.1 と図 5.2 に示す。

表 5.1 IIR フィルタと FIR フィルタの比較

特徴	IIR フィルタ	FIR フィルタ
インパルス 応答	無限長	有限長
伝達関数	$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$ z^{-1} の有理関数で分母を有し, $z = 0$ 以外の極を持つ。	$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3},$ z^{-1} の高次多項式で $z = 0$ のみに極を持つ。
安定性	極が単位円の内側にあるときに安定である。	極 $z = 0$ は単位円内にあり, 常に安定である。
回路構造	フィードフォワードとフィードバックから構成される。	フィードフォワードのみから構成される。
回路方程式	$y(n) = -b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2) + a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)$	$y(n) = h_0 x(n) + h_1 x(n-1) + h_2 x(n-2) + h_3 x(n-3)$
アナログフィルタとの 対応	等価的なアナログフィルタが存在し, 変数変換によりデジタルフィルタの伝達関数が求まる。	等価的なアナログフィルタは存在しない。デジタルフィルタ独自の関数近似が必要である。
フィルタ特性	急峻な振幅特性や全域通過形の位相平等化器等の実現に適する。	緩やかな振幅特性, 線形位相特性, マルチレートフィルタの実現に適している。

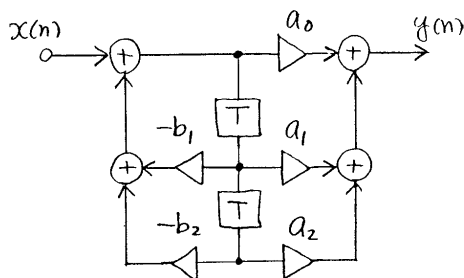


図 5.1 2次 IIR フィルタ

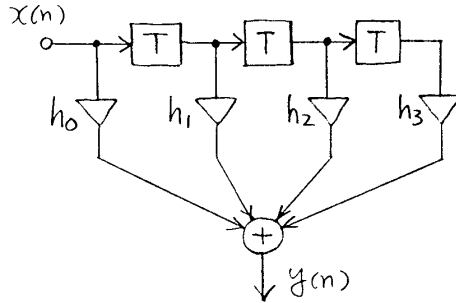


図 5.2 3次 FIR フィルタ

5.2 アナログフィルタの伝達関数

基本的なアナログフィルタの伝達関数の設計法を述べる。

5.2.1 バターワースフィルタ

〔1〕 N 次低域通過フィルタ (Low Pass Filter: LPF)

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}} \quad (5.1)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (5.2)$$

振幅特性の概略図を図 5.3 に示す。 $\omega = \omega_c$ で振幅の二乗は $1/2$ 、すなわち $-3dB$ になる。 $|H_a(j\omega)|^2$ の $\omega = 0$ における導関数のうち $2N - 1$ 次まで零になる。このような特性を $\omega = 0$ の回りで最大平坦であるという。このフィルタの特性を決めるパラメータは次数 N とカットオフ周波数 ω_c である。

設計は図 5.4 に示すように、通過域を ω_c で決め、阻止域における減衰量はフィルタ次数 N で調整する。

〔2〕 極配置

$|H_a(j\omega)|^2$ の極は分母 = 0 より求まる。 $j\omega$ を s と置き換える。

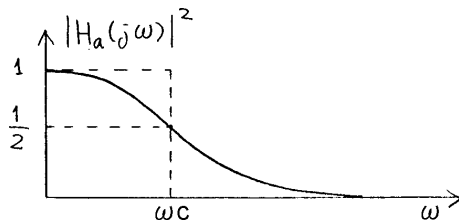
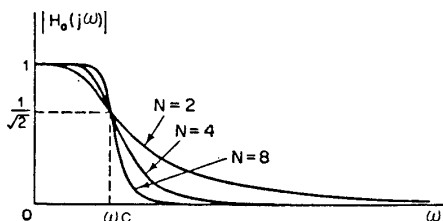


図 5.3 バターワースフィルタの振幅特性

図 5.4 バターワースフィルタの振幅特性と次数 N の関係

$$1 + \left(\frac{s}{j\omega_c} \right)^{2N} = 0 \quad (5.3)$$

これより, s は -1 の原始 $2N$ 乗根として求まり, N が奇数, 偶数に応じて以下ようになる.

$$N = \text{奇数} \quad s_k = \omega_c e^{j2\pi k/2N}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1 \quad (5.4)$$

$$N = \text{偶数} \quad s_k = \omega_c e^{j\pi/2N} e^{j2\pi k/2N}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1 \quad (5.5)$$

上式で与えられる s_k が次式を満たすことを確認されたい.

$$\left(\frac{s_k}{j\omega_c} \right)^{2N} = -1 \quad (5.6)$$

$N = 2$ と $N = 3$ の例を図 5.5 と図 5.6 に示す。

$|H_a(s)|^2$ から安定な極を取り出すことにより $H_a(s)$ の極が求まる。アナログフィルタで安定な極は s 平面の左半平面に分布する[†]。 $N = 3$ の場合の例を図

[†] 附録 5.6.1 参照

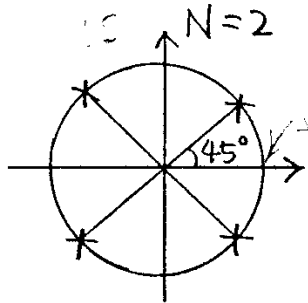


図 5.5 2次バターワースフィルタの極配置

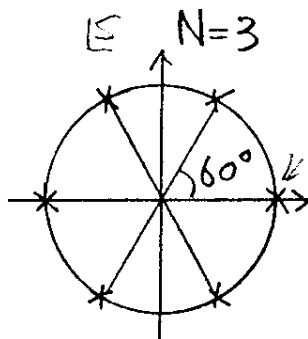


図 5.6 3次バターワースフィルタの極配置

5.7 に示す。

左半平面の極を用いて $H_a(s)$ は次のように表される。

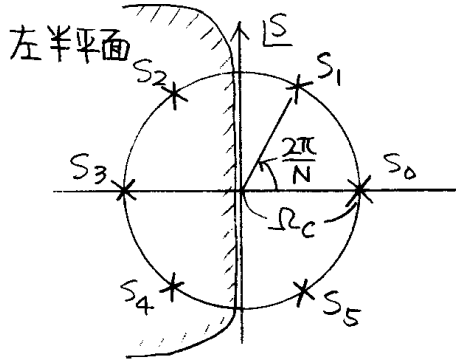


図 5.7 $|H_a(s)|^2$ の極から $H_a(s)$ の極を抽出

$$H_a(s) = \sum_{k \in \Phi} \frac{a_k}{s - s_k} = \prod_{k \in \Phi} \frac{b_k}{s - s_k}, \quad \Re[s_k] < 0 \quad (5.7)$$

Φ は左半平面にある極の集合を表す。 $s = \infty$ で $H_a(s) = 0$ となるので $s = \infty$ に零点を有する。

5.2.2 チェビシェフフィルタ

〔1〕 N 次低域通過フィルタ

フィルタの通過域や阻止域においてある許容範囲が設定されている場合は、その許容範囲内で等リップル近似することによりフィルタ次数を下げるができる。ここでは、通過域または阻止域における振幅特性が等リップルとなるチェビシェフフィルタについて述べる。

振幅特性の二乗は次式で与えられる。

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2(j\omega/j\omega_c)} \quad (5.8)$$

$$V_N(x) = \cos(N \cos^{-1} x) \quad (5.9)$$

$V_N(x)$ は N 次のチェビシェフ多項式である。振幅特性の例を図 5.8 に示す。通

過域のリップル幅が ϵ , 通過域端が ω_c , 阻止域減衰量が次数 N で決まる。

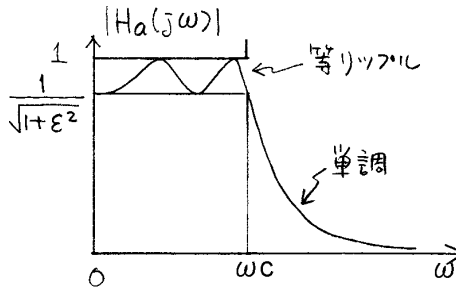


図 5.8 チェビシェフフィルタの振幅特性

〔2〕 チェビシェフ多項式の例

$$V_0(x) = 1 \tag{5.10}$$

$$V_1(x) = \cos(\cos^{-1} x) = x \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \cos(2 \cos^{-1} x) = 2 \cos^2(\cos^{-1} x) - 1 \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned} \tag{5.12}$$

⋮

$$V_{n+1} = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x) \tag{5.13}$$

式 (5.9) の $V_N(x)$ が式 (5.13) を満たすことは次のように示される。

$$\cos \theta = x, \quad \cos^{-1} x = \theta \text{ とする} \tag{5.14}$$

$$V_{n+1} = \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \tag{5.15}$$

$$- \sin n\theta \sin \theta = \frac{1}{2} [\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta] \tag{5.16}$$

これより

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos(n-1)\theta \tag{5.17}$$

最後の式は式 (5.13) と同じである。

チェビシェフ多項式の例を図 5.9 に示す。 $V_n^2(x)$ が $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $[0, 1]$

の間で波打っており、 $1 < x$ の範囲では x に対して単調に増加している。従って、式 (5.8) の $|H_a(j\omega)|^2$ は $0 \leq \omega \leq \omega_c$ の範囲では $1/\sqrt{1+\epsilon^2} \leq |H_a(j\omega)|^2 \leq 1$ の範囲で振動し、 $\omega > \omega_c$ では単調に減少する。

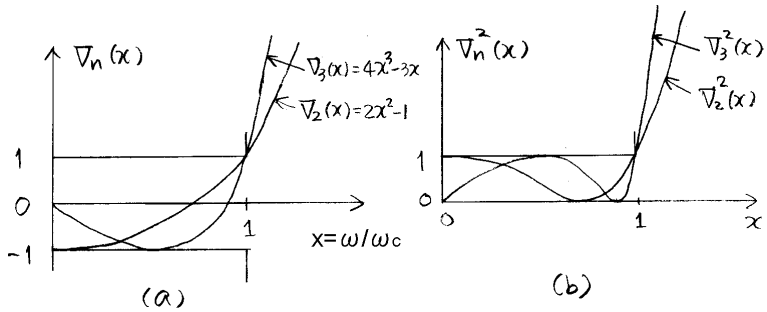


図 5.9 チェビシェフ多項式の例

[3] チェビシェフフィルタの極配置

$N = 3$ の場合の $|H_a(j\omega)|^2$ の極配置を図 5.10 に示す。

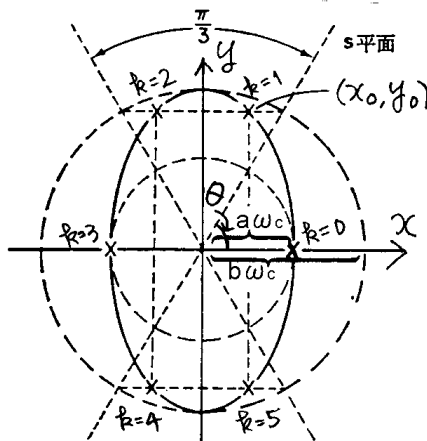


図 5.10 3次チェビシェフフィルタにおける $|H_a(j\omega)|^2$ の極配置

破線のなす角度はバターワースフィルタの場合と同じである。極の y 座標はこの破線と $b\omega_c$ を半径とする円との交点で決まる。極は短軸が $a\omega_c$, 長軸が $b\omega_c$ である楕円上に位置する。極座標の具体的な計算方法を以下に示す。フィルタの所望特性から N, ϵ, ω_c は与えられているものとする。

$$\alpha = \epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} \tag{5.18}$$

$$a = \frac{1}{2}(\alpha^{1/N} - \alpha^{-1/N}) \tag{5.19}$$

$$b = \frac{1}{2}(\alpha^{1/N} + \alpha^{-1/N}) \tag{5.20}$$

$$\frac{x^2}{(a\omega_c)^2} + \frac{y^2}{(b\omega_c)^2} = 1 \tag{5.21}$$

$$\theta_k = \begin{cases} \frac{k\pi}{N}, k = 0, 1, \dots, 2N - 1 & N : \text{奇数} \\ \frac{\pi}{2N} + \frac{k\pi}{N}, k = 0, 1, \dots, 2N - 1 & N : \text{偶数} \end{cases} \tag{5.22}$$

$$y_k = b\omega_c \sin \theta_k \tag{5.23}$$

$$x_k = \pm a\omega_c \sqrt{1 - \frac{y_k^2}{(b\omega_c)^2}} \tag{5.24}$$

$$= \pm a\omega_c \sqrt{1 - \sin^2 \theta_k} \tag{5.25}$$

伝達関数 $H_a(s)$ の極としては s 平面の左半平面にある極を用いる。

$$H_a(s) = h_0 \prod_{k \in \Phi} \frac{1}{s - s_k}, \quad \Re[s_k] < 0 \tag{5.26}$$

h_0 は $f = 0$ で振幅が 1 (N が奇数) または $1/\sqrt{1 + \epsilon^2}$ (N が偶数) となるように決められる。

5.2.3 楕円フィルタ

通過域と阻止域の双方で振幅特性が等リップルとなるフィルタは楕円フィルタと呼ばれ、さらに、フィルタ次数を下げるができる。振幅特性は次式で与えられ、図 5.11 のような特性となる。通過域と阻止域における振幅特性が

$[1, 1 - \delta_1]$, $[0, \delta_2]$ の範囲で振動する。通過域端 ω_p と阻止域端 ω_s を指定することができる。

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2(\omega)} \quad (5.27)$$

$U(\omega)$ はヤコビの楕円関数と呼ばれる。楕円フィルタの極はチェビシェフ多項式のように計算式を書き下すことは難しく、設計のための表が用意されている。

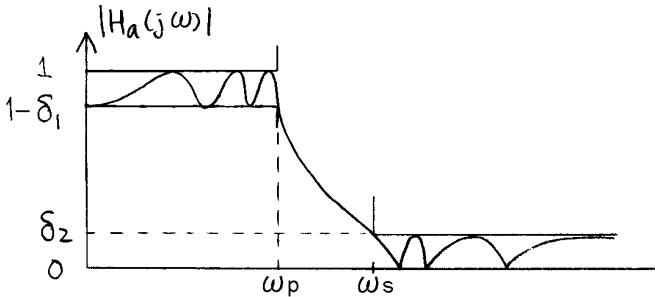


図 5.11 楕円フィルタの振幅特性

5.2.4 重み付等リップル近似

実際のフィルタ設計では、通過域や阻止域の許容範囲が一定ではなので、重み付き等リップル近似が必要となる。この場合は、計算機を用いて逐次近似法により伝達関数を設計する。

5.3 インパルス応答不変変換

5.3.1 インパルス応答の標本化

アナログフィルタ $H_a(s)$ のインパルス応答 $h_a(t)$ の標本値 $h_a(nT)$ をインパルス応答とするデジタルフィルタの伝達関数を求める方法をインパルス応答不変変換という。この様子を図 5.12 に示す。

この方法は連続時間信号を標本化することに相当するため、元のアナログフィ

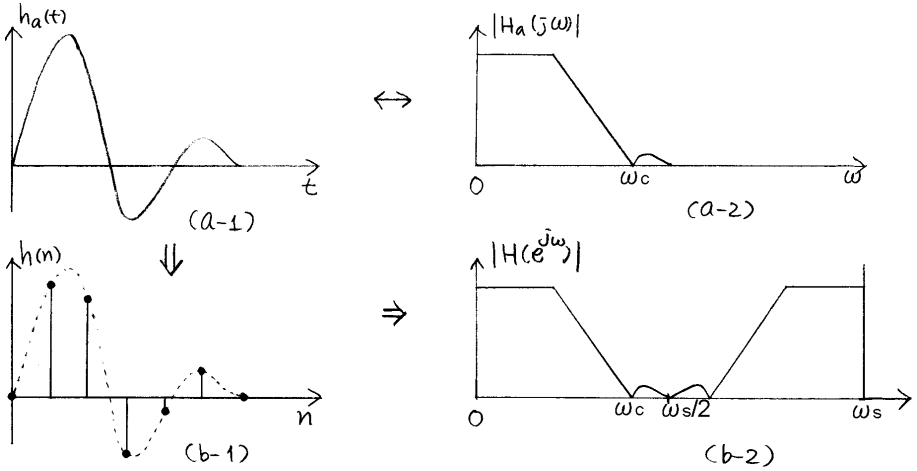


図 5.12 インパルス応答不変変換の例

ルタの振幅特性はある帯域に制限されている必要がある。標準化周波数を ω_s とすると、標準化定理より

$$|H_a(j\omega)| = 0, \quad |\omega| \geq \omega_s/2 \quad (5.28)$$

を満たす必要がある。従って、実現できるフィルタ特性は低域通過フィルタ (Low-pass Filter: LPF) や帯域通過フィルタ (Band-pass Filter: BPF) に限られ、高域通過フィルタ (High-pass Filter: HPF)、帯域阻止フィルタ (Band-elimination Filter: BEF)、全域通過フィルタ (All-pass Filter: APF) の設計には適用できない。一方、式 (5.28) の条件が満たされている場合は、デジタルフィルタのインパルス応答はアナログフィルタのそれを標準化したものとなり、 $|\omega| \leq \omega_s/2$ における周波数特性もアナログフィルタと全く同じになる。

5.3.2 伝達関数の設計

$H_a(s)$ のインパルス応答を $h_a(t)$ とし、これを標準化して、デジタルフィルタのインパルス応答 $h(n)$ を求めることを考える。 $H_a(s)$ を部分分数に展開

する。

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{s - s_k}, \quad \Re[s_k] < 0 \quad (5.29)$$

$H_a(s)$ の逆ラプラス変換[†] により, $h_a(t)$ が求まる。

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{s_k t}, \quad t \geq 0 \quad (5.30)$$

$h_a(t)$ を T 秒間隔で標本化する。

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N a_k e^{s_k nT}, \quad n \geq 0 \quad (5.31)$$

デジタルフィルタの伝達関数は $h(n)$ を z 変換して求まる。

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^N a_k e^{s_k nT} \right] z^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^N a_k \left[\sum_{n=0}^{\infty} (e^{s_k T} z^{-1})^n \right] \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}, \quad |e^{s_k T} z^{-1}| < 1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

従って, 伝達関数は部分分数に展開した形で次のように対応する。

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{s - s_k} \Rightarrow H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (5.33)$$

$H_a(s)$ の極 s_k は $H(z)$ では $e^{s_k T}$ に変化する。 $H_a(s)$ が安定であれば, $\Re[s_k] < 0$ であり, $|e^{s_k T}| < 1$, すなわち単位円内にあるから, $H(z)$ も安定である。

5.3.3 s 平面から z 平面への写像

インパルス応答の標本化により s 平面上の座標が z 平面上の何処に写像されるか考える。

$$\Re[s_k] < 0 \rightarrow |e^{s_k T}| < 1 \quad (5.34)$$

[†] 附録 3.5.3 参照

$$\Re[s_k] = 0 \rightarrow |e^{s_k T}| = 1 \quad (5.35)$$

$$e^{j(\omega T + 2n\pi)} = e^{j\omega T} \quad (5.36)$$

これらの性質から次のことが言える。

- s 平面の左半平面は z 平面の単位円内に写像される。
- s 平面の虚軸は z 平面の単位円上に写像される。
- s 平面の虚軸上の $(-\pi + 2n\pi)/T \leq \omega \leq (\pi + 2n\pi)/T$, $n = \text{整数}$ は z 平面の単位円上の $e^{-j\pi} \sim e^{j\pi}$ に写像される。

s 平面の虚軸上の区間が繰り返し, z 平面の単位円上に写像される。これは, 第2章で述べたように, 標本化によりアナログフィルタの周波数特性がシフトされ重畳加算されることに相当する。この様子を図 5.13 に示す。

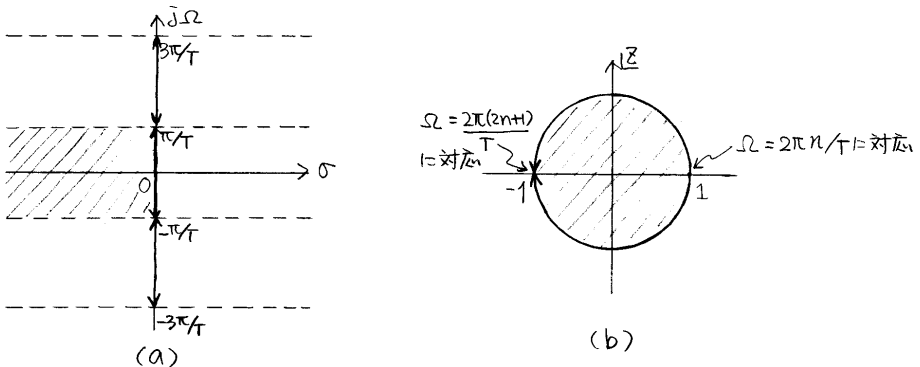


図 5.13 インパルス応答不変変換による (a) s 平面と (b) z 平面の写像関係

5.4 双1次 z 変換

アナログフィルタの $-\infty \leq \omega \leq \infty$ の特性をデジタルフィルタの $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ に写像する方式である。標本化を伴わないため、アナログフィルタの周波数特性が帯域制限されている必要はない。一方、アナログフィルタの周波数特性は周波数軸上を伸縮されて写像される。インパルス応答及び時間応答は保存されない。本節では、アナログフィルタとデジタルフィルタの周波数軸を区別するために前者を Ω 、後者を ω と表す。

5.4.1 s-z 変換式の導出

s 平面の虚軸を z 平面の単位円上に写像する為に、s-z の関係は次の条件を満たす必要がある。

$$s = f(z) \quad \text{において}$$

$$f(e^{j\omega T}) = \text{純虚数} \quad (5.37)$$

さらに、フィルタ次数が増えないことも大切である。このような条件を満たす関数 $f()$ として次の双1次関数を用いる。

$$s = f(z) = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (5.38)$$

上式において、

$$j\Omega = f(e^{j\omega T}) = j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (5.39)$$

が成り立つから、s 平面の虚軸 $j\Omega$ が z 平面の単位円 $e^{j\omega T}$ に写像されることが分かる。周波数で見た対応は次のようになる。

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan(\omega T/2) \quad (5.40)$$

これより、s 平面の虚軸上の周波数 $-\infty \leq \Omega \leq \infty$ が z 平面の単位円上の周波数 $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ に写像される。この様子を図 5.14 に示す。この図にも示すように、双1次 z 変換によりフィルタの周波数特性は周波数軸方向に伸縮する。この際、振幅方向のリップルは保存される。すなわち、アコーディオンの蛇

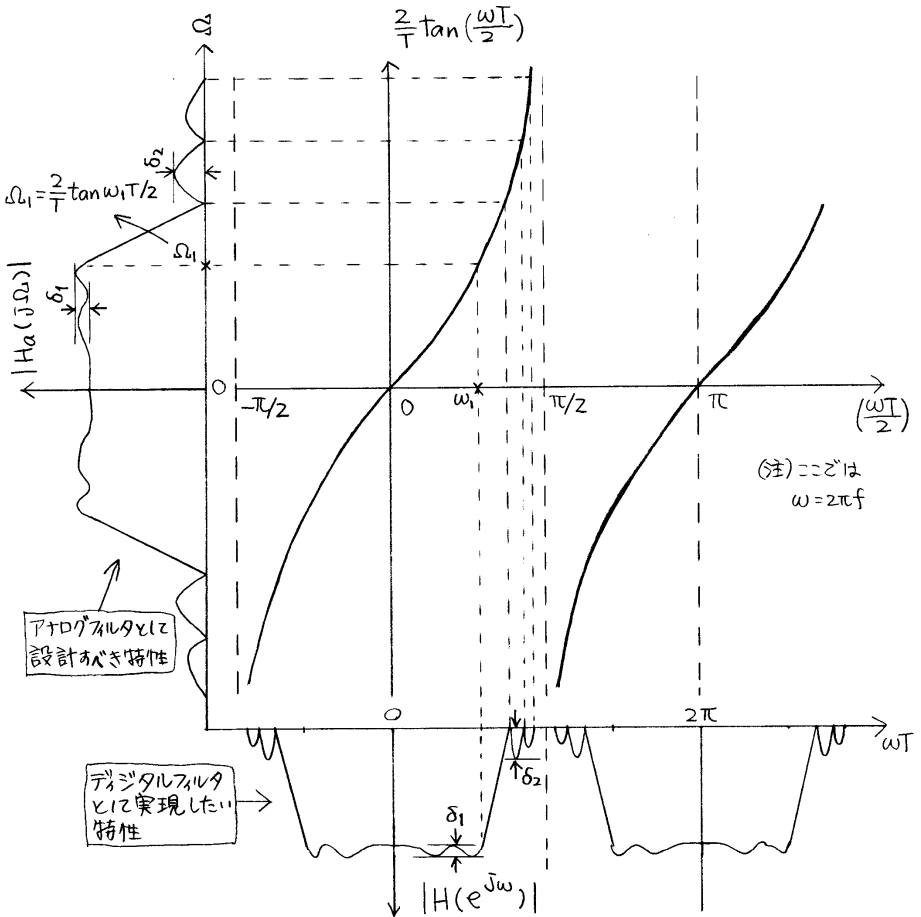


図 5.14 双1次z変換による周波数特性の変換

腹のような変化をする。このため、振幅特性が等リプルであるデジタルフィルタを設計する場合に、予め同じリプル特性を有するアナログフィルタを設計し、式 (5.38) の s - z 変換によりデジタルフィルタの伝達関数を求めることができる。デジタルフィルタとして実現したい特性をアナログフィルタ側に変換する際に、プリウオーピング (pre-warping) と呼ばれる前処理が必要である。

5.4.2 s 平面と z 平面の写像関係

式 (5.38) を z について解いて、 $s = \sigma + j\Omega$ と置く。

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} = \frac{1 + \frac{T}{2}\sigma + j\frac{T}{2}\Omega}{1 - \frac{T}{2}\sigma - j\frac{T}{2}\Omega} \quad (5.41)$$

これより、次の関係を得る。

$$\sigma > 0 \text{ (右半平面)} \rightarrow |z| > 1 \text{ (単位円の外側)} \quad (5.42)$$

$$\sigma = 0 \text{ (虚軸上)} \rightarrow |z| = 1 \text{ (単位円上)} \quad (5.43)$$

$$\sigma < 0 \text{ (左半平面)} \rightarrow |z| < 1 \text{ (単位円の内側)} \quad (5.44)$$

さらに、式 (5.40) より、 s 平面の虚軸上の $0 \leq \omega \leq \infty$ 、 $-\infty \leq \omega \leq 0$ が z 平面の単位円上の $0 \leq \omega \leq \pi/T$ 、 $-\pi/T \leq \omega \leq 0$ に各々対応する。以上の関係を図 5.15 に示す。

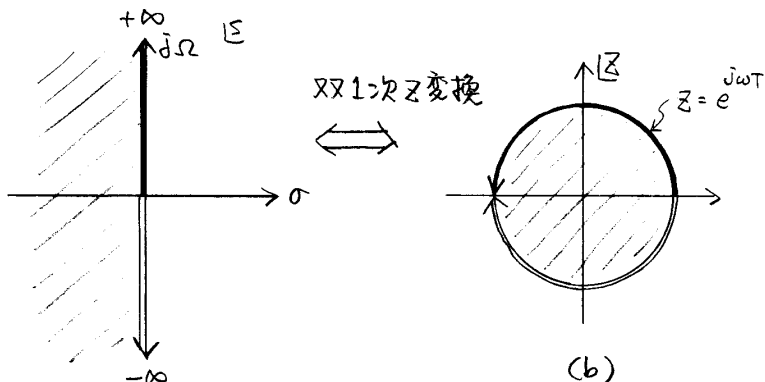


図 5.15 双一次 z 変換による s 平面と z 平面の写像関係

5.4.3 デジタルフィルタの設計手順

1. デジタルフィルタに対する所望特性（仕様）をプリウオーピングしてアナログフィルタに対する仕様を求める。

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (5.45)$$

2. 上記のフィルタ仕様を満たすアナログフィルタの伝達関数 $H_a(s)$ を設計する。
3. 双 1 次 z 変換する。

$$H(z) = H_a\left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) \quad (5.46)$$

$H(e^{j\omega})$ は所望特性を満たす。

双 1 次 z 変換による設計の特徴

1. アナログフィルタの設計では、周波数軸のプリウオーピングが必要である。
2. フィルタ特性が帯域制限されている必要がないため、LPF、BPF、HPF、BEF の設計に適している。
3. アナログフィルタの時間応答は保存されない。しかし、狭帯域の LPF の場合は近似的に保存される。
4. 位相特性は周波数軸方向にのみ伸縮するが、群遅延特性は位相特性の微分であるため大きさも変化する。

5.4.4 設計例

5.5 演習問題

- 1.
- 2.

5.6 附録

5.6.1 アナログフィルタの極と安定性の関係

アナログフィルタの伝達関数を

$$H_a(s) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{s_k}{s - s_k} \quad (5.47)$$

とする．上式を次のように部分分数に展開する．

$$H_a(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{c_k}{s - s_k} \quad (5.48)$$

$H_a(s)$ を伝達関数とする回路のインパルス応答，すなわち， $H_a(s)$ の逆フーリエ変換 $h_a(t)$ は次のように求まる．

$$h_a(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{s_k t} \quad (5.49)$$

さらに，極 s_k を次のように複素数で表す．

$$s_k = \delta_k + j\omega_k \quad (5.50)$$

式 (5.49) より，

$$\begin{aligned} h_a(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\delta_k + j\omega_k t} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\delta_k t} e^{j\omega_k t} \end{aligned} \quad (5.51)$$

上式から分かるように， $|e^{j\omega_k t}| = 1$ であるから，インパルス応答 $h_a(t)$ は時間 t を零から無限大に大きくしたとき，極の実部 δ_k により，次のように変化する．

$$\delta_k > 0 \quad \text{発散 - 不安定} \quad (5.52)$$

$$\delta_k = 0 \quad \text{発振 - 臨界安定} \quad (5.53)$$

$$\delta_k < 0 \quad \text{収束 - 安定} \quad (5.54)$$

回路が安定であるのは $\delta_k < 0$ の場合であり，極が s 平面の左半平面にある場合

である .