

6

FIR デジタルフィルタの設計法

FIR フィルタは第 5 章でも述べたように、常に安定であるほか、線形位相特性が可能であり、画像処理等に適している、また、標準化周波数の変換を伴うマルチレートフィルタにも適している。さらに、フィルタ係数を自動調整する適応フィルタとしても FIR フィルタが主に用いられている。一方、FIR フィルタに対応するアナログフィルタはなく、デジタルフィルタ独自の設計法が必要である。

6.1 線形位相 FIR フィルタ

6.1.1 線形位相特性

デジタルフィルタの周波数特性 $H(e^{j\omega})$ は複素数であり、一般に次の極形式で表される。

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)} \\ &= |H(e^{j\omega})|(\cos \theta(\omega) + j \sin \theta(\omega)) \end{aligned} \quad (6.1)$$

ここで、 $|H(e^{j\omega})|$ が振幅特性、 $\theta(\omega)$ が位相特性である。位相特性が

$$\theta(\omega) = -K\omega T, \quad K > 0 \quad (6.2)$$

であるとき、線形位相であるという。

6.1.2 入出力波形の関係

図 6.1 に示す例について考えてみる。

周波数特性は次のように表される。

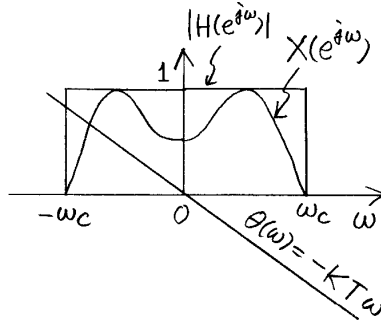


図 6.1 線形位相フィルタの例

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\theta(\omega) = -K\omega T, \quad K > 0 \quad (6.4)$$

$$|X(e^{j\omega})| = 0, \quad |\omega| \geq \omega_c \quad (6.5)$$

ここでは、入力信号の帯域ではフィルタの振幅特性 = 1 となっており、位相特性のみが変化する。出力信号の周波数特性は

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})e^{-jK\omega T} \quad (6.6)$$

第 1 章で述べたフーリエ変換の性質から、出力信号 $y(n)$ は

$$y(n) = x(n - K) \quad (6.7)$$

となり、入力信号 $x(n)$ を K サンプルだけ遅れ方向にシフトした信号であり、波形そのものは変化していない。この様子を図 6.2 に示す。線形位相フィルタでは波形[†] が変化しないため、信号の波形そのものが情報を有する画像伝送、データ伝送、オーディオ信号処理等に有用である。一方、IIR フィルタでは、線形位相を実現することは難しく、通常は全域通過フィルタを用いて位相特性を線形にする方法が用いられる。

例題

[†] 通過帯域の周波数成分に対する信号波形が変化しないことを意味している。

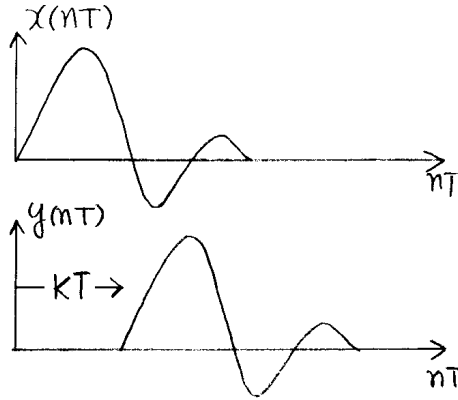


図 6.2 線形位相フィルタにおける入出力関係の例

入力 $x(n)$ が周波数 ω_1 の正弦波である場合，その出力 $y(n)$ は位相特性が $-K\omega_1 T$ だけ変化するから，

$$x(n) = \cos(\omega_1 nT + \phi) \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \cos(\omega_1 nT - K\omega_1 T + \phi) \\ &= \cos(\omega_1(n - K)T + \phi) \\ &= x(n - K) \end{aligned} \quad (6.9)$$

となる。これは， $x(n)$ が K サンプルだけ遅れ方向にシフトされた信号である。

群遅延時間について

群遅延時間は位相特性を微分したものである。

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (6.10)$$

従って，線形位相のときは

$$\tau(\omega) = -\frac{d(-K\omega T)}{d\omega} = KT \quad (6.11)$$

となり，時間遅れを表している。しかし，一般的に，群遅延時間は周波数に対する位相の変化率を表すものであり，信号の時間遅れを表すものではない。通過域の群遅延時間が信号の時間遅れをおおよそ表している。

6.1.3 伝達関数の一般形

線形位相 FIR フィルタの伝達関数としてはいくつかの形式がある。

インパルス応答が偶対称

$$h(n) = h(N-1-n) \quad (6.12)$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} N: \text{奇数} \\ e^{-j\frac{\omega(N-1)T}{2}} \left[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos\left(\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) \right] \\ N: \text{偶数} \\ e^{-j\frac{\omega(N-1)T}{2}} \left[\sum_{n=0}^{(N/2-1)} 2h(n) \cos\left(\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) \right] \end{cases} \quad (6.13)$$

インパルス応答が奇対称

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad (6.14)$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} N: \text{奇数} \\ e^{-j\frac{\omega(N-1)T}{2}} \left[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} j2h(n) \sin\left(\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) \right] \\ N: \text{偶数} \\ e^{-j\frac{\omega(N-1)T}{2}} \left[\sum_{n=0}^{(N/2-1)} j2h(n) \sin\left(\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) \right] \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\text{但し, 奇対称の場合は } h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0 \quad (6.16)$$

偶対称の場合は, [] は実数であり, 位相特性は $e^{-j\omega T(N-1)/2}$ で決まる。奇対称の場合は [] の中は純虚数であるが, j は位相としては 90 度に対応しており, 周波数によって変化しない。従って, 奇対称の場合も線形位相であるといえる。

6.1.4 線形位相 FIR フィルタの零点配置

インパルス応答 (= フィルタ係数) が偶対称となるとき伝達関数の零点配置は図 6.3 に示すように鏡像関係にある z_1 と z_1' のペア, 単位円上の z_2 , 及び周波数 = 0 に相当する $z = 1$ にある z_3 を偶数個を含む。奇対称の場合は, z_3 が奇数個である他は偶対称の場合と同じである。これらの零点から構成される伝達関数は次のように表される。

$$z_1 \rightarrow H_1(z) = 1 - 2r \cos \theta_1 z^{-1} + r^2 z^{-2} \quad (6.17)$$

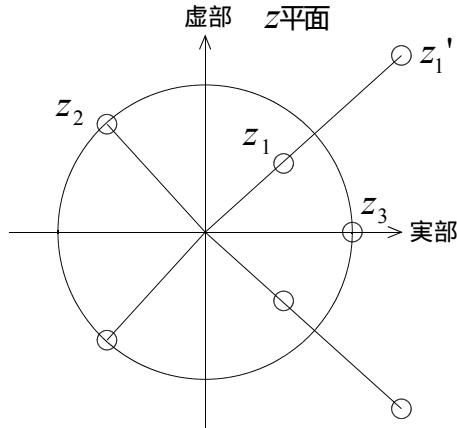


図 6.3 線形位相フィルタにおける零点分布の例

$$z'_1 \rightarrow H'_1(z) = 1 - 2\frac{1}{r} \cos \theta_1 z^{-1} + \frac{1}{r^2} z^{-2} \quad (6.18)$$

$$z_2 \rightarrow H_2(z) = 1 - 2 \cos \theta_2 z^{-1} + z^{-2} \quad (6.19)$$

$$z_3 \rightarrow H_3(z) = 1 - z^{-1} \quad (6.20)$$

これらの組み合わせにより，伝達関数全体としてインパルス応答（フィルタ係数）が偶対称及び奇対称になることが分かる。インパルス応答の例を図 6.4 に示す。

例題

z_1, z'_1, z_2 で構成される伝達関数：

$$H(z) = H_1(z)H'_1(z)H_2(z) : \text{偶対称} \quad (6.21)$$

z_1, z'_1, z_3 で構成される伝達関数：

$$H(z) = H_1(z)H'_1(z)H_3(z) : \text{奇対称} \quad (6.22)$$

一般に，次の関係がある。

偶対称 × 偶対称 = 偶対称

偶対称 × 奇対称 = 奇対称

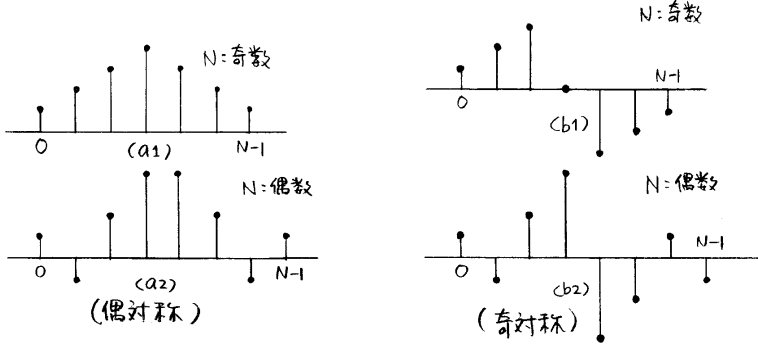


図 6.4 線形位相フィルタにおけるインパルス応答の例

奇対称 × 奇対称 = 偶対称

〔1〕 零点配置と周波数特性 零点配置と周波数特性の関係は図 6.5 のようになる。通過域にある零点に対応する周波数では、振幅特性は谷となる。阻止域にある単位円上の零点に対応する周波数では振幅は零となる。通過域はなだらかな傾斜となる。これらを掛け合わせるにより、通過域と阻止域の双方で等リップルとなる振幅特性が実現できる。

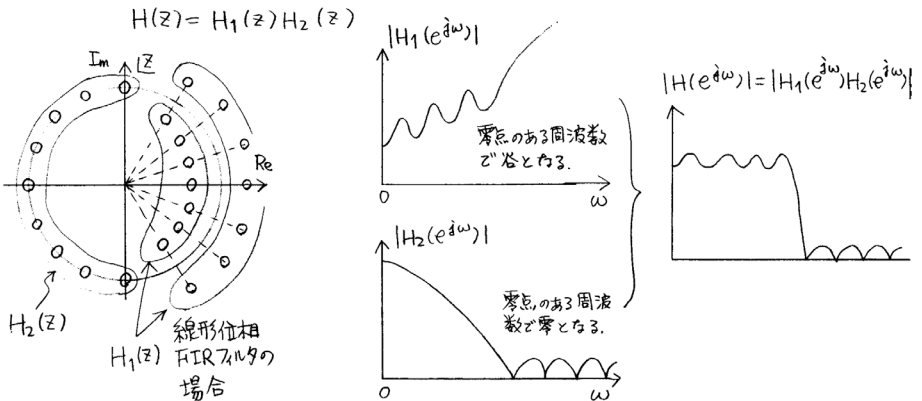


図 6.5 FIR フィルタの零点配置と振幅特性の関係

6.1.5 応用例

線形位相 FIR フィルタの応用例として、オーディオ装置で用いられるオーバーサンプリング A/D 変換器がある。アナログ信号をカットオフ周波数の高い低域通過フィルタで帯域制限し、信号帯域の 2 倍以上の周波数でサンプリング（オーバーサンプリング）する。その後、所定のカットオフ周波数を有する線形位相 FIR フィルタで帯域制限を行い、所定の周波数でダウンサンプリングする。これにより、音響帯域における位相歪みを小さく抑えることができる。3 倍にオーバーサンプルした場合のブロック図を図 6.6 に、振幅特性を図 6.7 に示す。

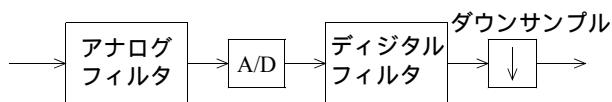


図 6.6 オーバーサンプルによるフィルタ設計 - ブロック図 -

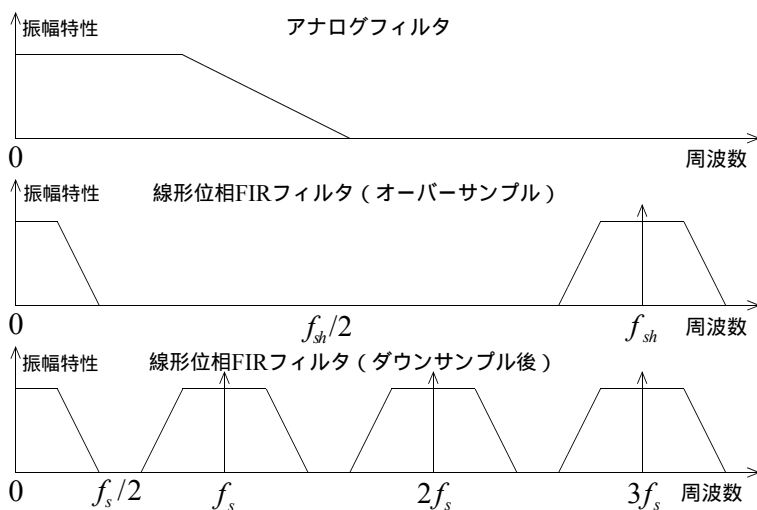


図 6.7 オーバーサンプルによるフィルタ設計 - 周波数特性 -

6.2 時間窓による FIR フィルタ設計法

理想フィルタの無限長インパルス応答を有限区間で切り取ることにより FIR フィルタのインパルス応答を得る方法である。切り取りに用いる時間窓関数により周波数特性が決まる。位相特性は任意である。

6.2.1 設計手順

設計の流れを図 6.8 に示す。

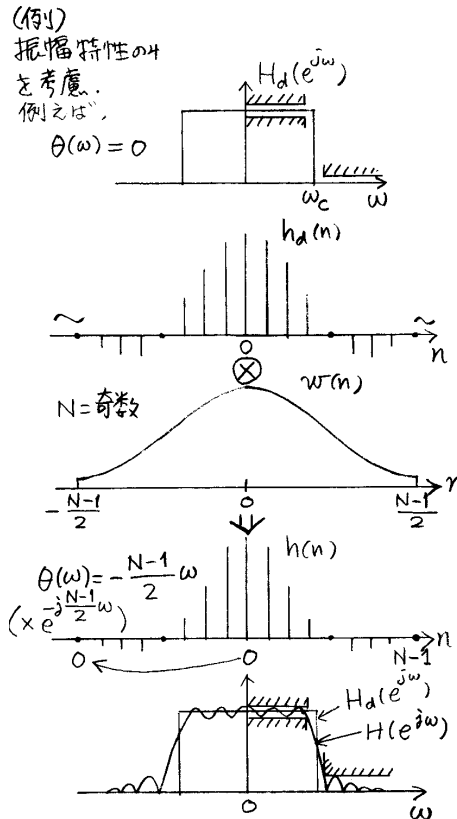


図 6.8 時間窓による FIR フィルタ設計法の流れ

1. 与えられたフィルタ仕様に対して理想特性 $H_d(e^{j\omega})$ を求める。図 6.8 では、振幅特性を理想特性とし、位相は零としている。

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (6.23)$$

$$\theta(\omega) = 0 \quad (6.24)$$

2. $H_d(e^{j\omega})$ を逆フーリエ変換して無限長インパルス応答 $h_d(n)$ を求める。

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n T} d\omega T \quad (6.25)$$

図 6.8 の例では、位相が零であるから $h_d(n)$ は $n = 0$ を中心として $-\infty \sim \infty$ に広がっている。

3. 所望特性に適する時間窓関数 $w(n)$ を選択する。詳しくは次節で述べる。
 4. $h_d(n)$ に時間窓関数 $w(n)$ をかけることにより、FIR フィルタのインパルス応答 $h(n)$ を求める。

$$h(n) = w(n)h_d(n), \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \quad (6.26)$$

無限長インパルス応答を有限で切り取ると周波数特性では Gibbs の現象と呼ばれるリップルが生じる。

5. 伝達関数 $H(z)$ を求めて、周波数特性が仕様を満たしているかどうか評価する。

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad \text{伝達関数} \quad (6.27)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n T} \quad \text{周波数特性} \quad (6.28)$$

上式では、 $h(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ としているが、これは式 (6.26) の $h(n)$ を遅れ方向に $(N-1)/2$ サンプルシフトしたものである。フーリエ変換の性質により、周波数特性は $e^{-j\omega(N-1)T/2}$ だけ変化する。すなわち、 $H_d(e^{j\omega})$ では位相 = 0 としていたが、 $H(e^{j\omega})$ では位相が $-j\omega(N-1)T/2$ に変化している。この位相特性は線形である。

6.2.2 時間窓による周波数特性の変化

無限長インパルス応答を有限で切り取ることによる周波数特性の変化は式 (6.29) の畳み込み積分に基づいて評価できる。その概念図を図 6.9 に示す。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega T - \theta)}) d\theta \quad (6.29)$$

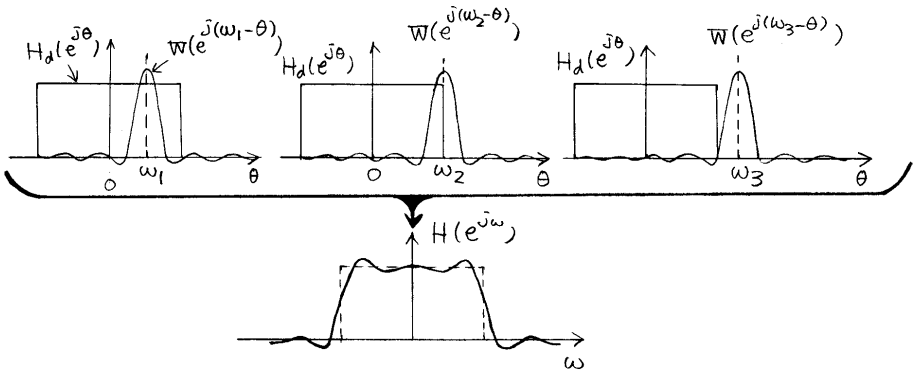


図 6.9 時間窓による周波数特性の変化

$H_d(e^{j\omega})$ と $W(e^{j(\omega_i T - \theta)})$ をかけて積分したものが、 $\omega = \omega_i$ における $H(e^{j\omega})$ の値である。従って、 $W(e^{j\omega})$ の形に依存する。図 6.10 に $W(e^{j\omega})$ の典型的な例を示す。

長方形窓の場合は、 $W(e^{j\omega})$ が狭帯域であるため、 $H(e^{j\omega})$ の遷移帯域を急峻にできるが、裾の波打ちが大きいので通過域に近い阻止域の振幅特性が十分に小さくならない。 $H_d(e^{j\omega})$ の時間応答を保存する場合は長方形窓が有効である。一方、山形の時間窓 $W(e^{j\omega})$ は広帯域であるため、急峻な特性には不向きであるが、裾のリップルは小さい。このため、阻止域の振幅特性は小さくでき、また、等リップルにできる利点がある。山形の時間窓として次のハミング窓がよく用いられる。

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6.30)$$

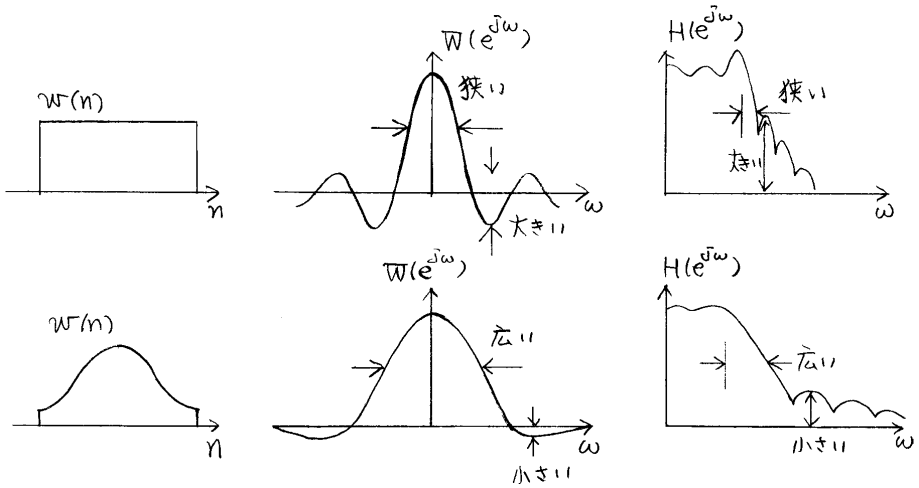


図 6.10 時間窓の形状とフィルタ特性の関係

時間窓を選択した後，所望特性を実現するためにはフィルタ次数 N を調整する。 N を大きくすることにより，阻止域の振幅はあまり変化しないが，遷移帯域は急峻になる。

例題

6.3 周波数サンプリング法

所望の理想特性 $H_d(e^{j\omega})$ を標本化して $H_d(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ を得る。これを IDFT して FIR フィルタのインパルス応答 $h(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ を得る。この方法では，インパルス応答は始めから N サンプルである。標本点以外の周波数における特性は波打つので， N を適当に選んでフィルタ仕様を満たすようにする。位相特性は任意である。

6.3.1 設計手順

設計の流れを図 6.11 に示す。

1. 与えられたフィルタ仕様を満たす理想特性 $H_d(e^{j\omega})$ を求める。関数である必要はなく、数値データでもよい。図 6.11 の例では、理想特性として通過域の振幅を 1、阻止域を零とし、位相は零としている。通過域から阻止域に移る帯域を遷移帯域と呼ぶ。
2. $H_d(e^{j\omega})$ を 1 周期の区間 $0 \leq \omega < 2\pi/T$ で N 等分して、標本値 $H_d(k)$ を求める。例では、 $N = 16$ である。

$$H_d(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi k}{N}}), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (6.31)$$

3. $H_d(k)$ の IDFT として FIR フィルタのインパルス応答 $h(n)$ を求める。

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6.32)$$

4. 伝達関数を求めて、周波数特性を評価する。標本点での値は $H_d(k)$ であるが、標本点の間では、一般にリップルが生じる。リップルがフィルタ仕様を満たすようにフィルタ次数 N を調整する。

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (6.33)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n T} \quad (6.34)$$

理想特性で位相 = 0 とすると、 $h(n)$ の 1 周期は $[-(N-1)/2, (N-1)/2]$ となる。但し、 N は奇数とする。上式では $h(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ としているので、 $(N-1)/2$ サンプルだけ遅れ方向にシフトしたことになり、周波数特性が $e^{-j\omega(N-1)T/2}$ だけ変化する。この場合も線形位相である。

5. 遷移帯域に標本点がある場合、すなわち、 $\omega_p < 2\pi k/NT < \omega_s$ を満たす k がある場合、この標本値の決め方により、遷移帯域近傍の特性が影響を受ける。これについては次節で述べる。

6.3.2 標本値による伝達関数の表現と回路構成

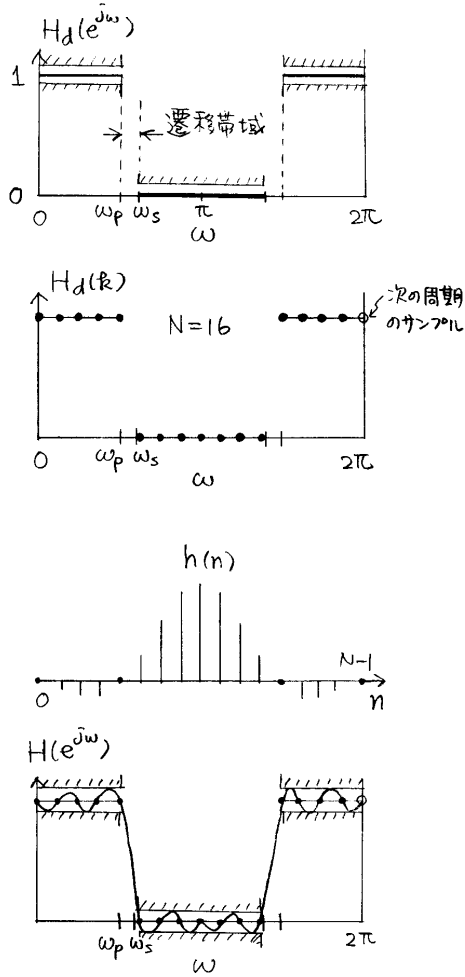


図 6.11 周波数サンプリング法に FIR フィルタ設計の流れ

FIR フィルタの伝達関数は標本値 $H_d(k)$ または $|H_d(k)|$ を用いて表現できる。

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (6.35)$$

$h(n)$ に式 (6.32) を代入する。

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j2\pi kn/N} \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j2\pi k/N} z^{-1} \right)^n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_d(k)}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} \end{aligned} \quad (6.36)$$

$1 - z^{-N}$ は単位円上に等間隔に配列されている N 個の零点を持つ。分母はそのうちの一つの零点と同じ位置に極を持ち、零点を相殺する。これらの関係を図 6.12 に示す。

式 (6.36) で表される伝達関数を実現する回路を図 6.13 に示す。標本値 $H_d(k)$ が直接用いられている点に特徴がある。所望特性を随時変化させる場合は乗算器の乗数を所望特性に合わせて変化させることができる。しかし、単位円上に極を有するため、安定性の問題があり零点、極共に単位円の内側に僅かに移動する必要がある。

次に、 $H_d(k)$ が次のように線形位相である場合は伝達関数を $|H_d(k)|$ で表現できる。

$$H_d(k) = |H_d(k)| e^{-j2\pi \frac{N-1}{2} k} \quad (6.37)$$

ここで、

$$1 - e^{-j\theta} = e^{-j\theta/2} \left(e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2} \right) = -j2e^{-j\theta/2} \sin(\theta/2) \quad (6.38)$$

$$z^{-N} = \left(e^{j2\pi k/N} e^{-j\omega} \right)^N \quad (6.39)$$

であることを考慮すると、 $H_d(e^{j\omega})$ は次のように変形される。

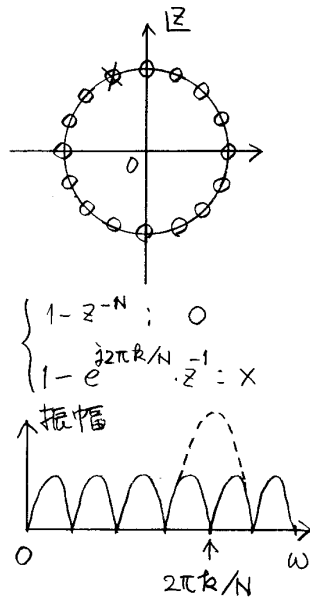


図 6.12 標本値を用いる伝達関数表現の零と極の分布と振幅特性

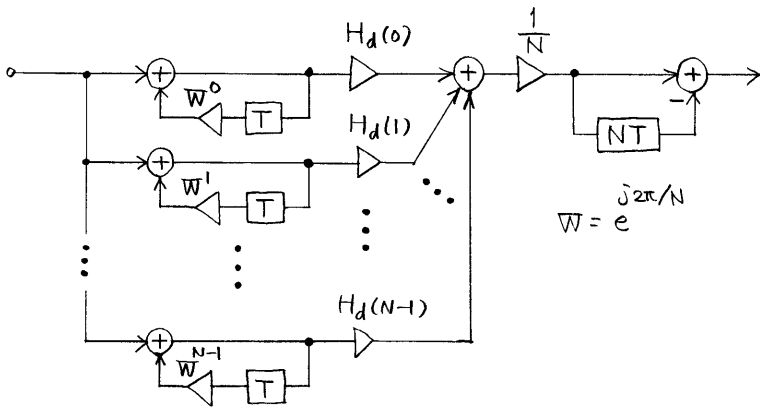


図 6.13 標本値を用いる伝達関数を実現する回路

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)T/2}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |H_d(k)| \frac{\sin(N(\omega T - 2\pi k/N)/2)}{\sin((\omega T - 2\pi k/N)/2)} \quad (6.40)$$

式 (6.36) 及び式 (6.40) は周波数領域において、標本値から元の連続関数を内挿する式である。

6.3.3 遷移帯域の標本値の決め方

式 (6.36) 及び式 (6.40) の $H(e^{j\omega})$ は標本値に関して 1 次式であることを利用して、最小自乗法により最適な遷移帯域の標本値を求めることができる。遷移帯域以外の標本値は既に決まっており、固定されているものとする。遷移帯域の標本値を H_k , $k \in \Phi$ とする。周波数特性は

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \Phi} a_k H_k + b \quad (6.41)$$

一般に、 a_k , b , H_k は複素数である。誤差評価を次のように設定する。

$$E = \sum_{i=0}^{M-1} |H_d(e^{j\omega_i}) - H(e^{j\omega_i})|^2 \quad (6.42)$$

ω_i は標本点以外の周波数であり、 H_k の影響を受ける帯域に設定する。上式は H_k に対する 2 次式であり、最小値は

$$\frac{\partial E}{\partial H_k} = 0, \quad k \in \Phi \quad (6.43)$$

を解くことにより求まる。上式は H_k に対する連立 1 次方程式となる。

6.3.4 設計例

6.4 逐次的な等リップル (チェビシェフ) 近似法

線形位相 FIR フィルタを対象として誤差が等リップルとなるように逐次的にフィルタ係数 $h(n)$ を更新する方法である。

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (6.44)$$

において、

$$h(n) = h(N - 1 - n) \quad (6.45)$$

であるとする、

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} \alpha(n) \cos n\omega \quad (6.46)$$

M は $N/2$, N : 偶数 または $(N - 1)/2$, N : 奇数 である。 $\alpha(n)$ は $h(n)$ または $2h(n)$ に対応する。 $e^{-j2\pi(N-1)T/2}$ は振幅特性に影響しないから省略されている。 ω は指定されるので定数となる。誤差関数を次のように設定する。

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})] \quad (6.47)$$

$W(e^{j\omega})$ は誤差に対する重み付けである。 ω は極値が精度よく計算できるように細かく設定される。

逐次近似のある段階で図 6.14 に示す誤差であったとする。このとき、極値

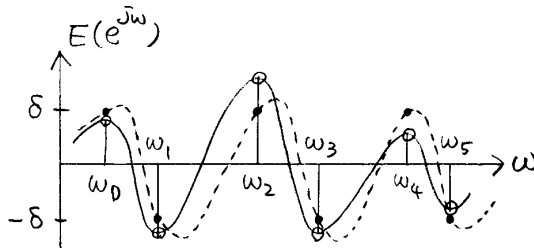


図 6.14 等リップル逐次近似法の途中段階における誤差関数

(白丸) を与える周波数 ω_i を求める。次に、この周波数において等リップルとなるように $\alpha(n)$ を更新する。これは次の方程式を解くことにより求まる。

$$E(e^{j\omega_i}) = W(e^{j\omega_i}) [H_d(e^{j\omega_i T}) - H(e^{j\omega_i T})] = (-1)^i \delta \quad (6.48)$$

この式は $\alpha(n)$ と δ に関する 1 次連立方程式となる。これを解いて $\alpha(n+1)$ と δ が求まる。実際には、ラグランジェの補間公式を用いるため、連立方程式を解く必要はない。図 6.14 の破線がこの結果の誤差関数である。指定した周波数 ω_i では等リップルになっている。しかし、極値を与える周波数がずれている。そこで、改めて、極値を与える周波数を求めて、上記の処理を繰り返す。この

更新を極値を与える周波数が変動しなくなるまで繰り返す。最終的に得られる $E(e^{j\omega})$ は図 6.15 のように等リップルになる。

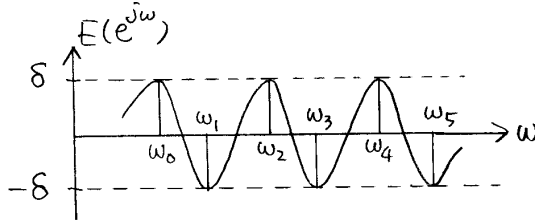


図 6.15 等リップル逐次近似法の最終段階における誤差関数

6.5 最小位相，最大位相 FIR フィルタの設計法

6.5.1 零点配置

図 6.16 は振幅特性が同じで，位相特性のみが異なる FIR フィルタの例を示している。零点は，線形位相では鏡像関係に位置し，最小位相では単位円内，最大位相では単位円外に分布する。単位円上の零点は全てのケースに含まれる。この例からも分かるように，最小位相では位相変化が小さく，群遅延も小さくなる。最大位相はその逆である。特に，線形位相が必要なく，時間遅れが問題となる場合は最小位相が用いられる。単位円内の極 $re^{\pm j\theta}$ を有する伝達関数を $H_{in}(z)$ ，単位円外の極 $r^{-1}e^{\pm j\theta}$ を有する伝達関数を $H_{out}(z)$ とする。これらの振幅特性は次のように表される。

$$\begin{aligned} |H_{out}(e^{j\omega})| &= |1 - 2r^{-1} \cos \theta e^{-j\omega T} + r^{-2} e^{-j2\omega T}| \\ &= r^{-2} |r^2 e^{j\omega T} - 2r \cos \theta + e^{-j\omega T}| \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} |H_{in}(e^{j\omega})| &= |1 - 2r \cos \theta e^{-j\omega T} + r^2 e^{-j2\omega T}| \\ &= |e^{j\omega T} - 2r \cos \theta + r^2 e^{-j\omega T}| \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$|H_{out}(e^{j\omega})| = r^{-2} |H_{in}(e^{-j\omega})| \quad (6.51)$$

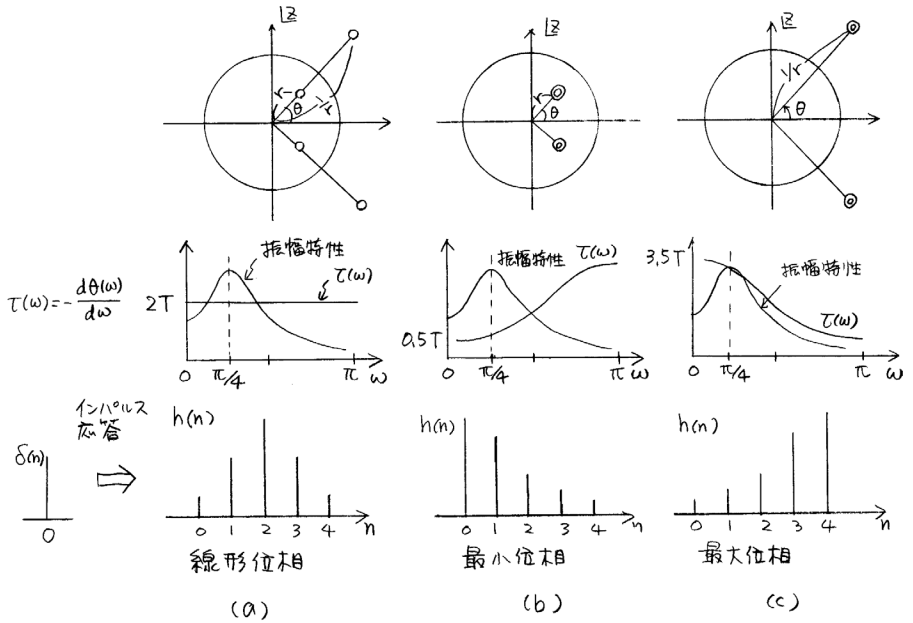


図 6.16 線形位相, 最小位相, 及び最大位相 FIR フィルタの零点配置, 群遅延特性, インパルス応答の関係

(6.52)

振幅特性は $\omega = 0$ に対して偶対称であるから, $H_{out}(z)$ と $H_{in}(z)$ は定数倍 r^{-2} を除いて同じ振幅特性を有することが分かる。最小位相や最大位相の場合は, 振幅特性が決まれば位相特性は一意に決まる。あるいは, 実数部が決まれば虚数部が一意に決まる。

6.5.2 設計法

振幅特性に対して仕様が与えられ, これを最小 (最大) 位相 FIR フィルタで実現する場合を考える。時間窓を用いる方法や周波数サンプリング法は理想的な位相特性を与える必要があるが, これを決めるのは困難である。一つの設計法は, 線形位相 FIR フィルタを設計し, 単位円外 (内) にある零点を虚像関係の位置ある単位円内 (外) に移す方法がある。このフィルタの振幅特性は定数倍を除いて始めに設計した線形位相 FIR フィルタの振幅特性と同じになる。

6.6 演習問題

1. インパルス応答 $h(n)$ が次式で与えられる FIR フィルタについて以下の間に答えよ。

$$h(0) = 0.5, h(1) = 1, h(2) = 0.5, h(n) = 0, n \neq 0, 1, 2 \quad (6.53)$$

- (a) 伝達関数 $H(z)$ を求めよ。
- (b) 周波数特性 $H(e^{j\omega})$ を求めよ。振幅と位相を ω の関数で表せ。位相特性が線形位相となっていることを確かめよ。また, 遅れ時間 (サンプル数) を求めよ。
- (c) $H(z)$ に次の信号 $x_1(n), x_2(n)$ を入力したときの出力信号 $y_1(n), y_2(n)$ を求めよ。但し, 標準化周波数は $f_s = 1/T = 8kHz$ とする。

$$x_1(n) = \cos(\omega_1 nT), \omega_1 = 2\pi f_1, f_1 = 1kHz \quad (6.54)$$

$$x_2(n) = \cos(\omega_2 nT), \omega_2 = 2\pi f_2, f_2 = 2kHz \quad (6.55)$$

- i. $y_1(n), y_2(n)$ を $n = 0 \sim 8$ の範囲で畳み込み和により求めよ . 但し , $x_1(n) = 0, x_2(n) = 0, n < 0$ とする . さらに , $x_1(n), y_1(n), x_2(n), y_2(n)$ を $n = 0 \sim 8$ の範囲で図示し , 定常応答における $x_i(n) \rightarrow y_i(n)$ の遅れ時間 (シフト量) が (b) で求めたものと同じであることを確かめよ .
- ii. $y_1(n), y_2(n)$ を $H(e^{j\omega})$ の振幅と位相を用いて表せ . $x_i(n) \rightarrow y_i(n)$ における遅れ時間 (シフト量) が (b) で求めたものと同じであることを確かめよ .

(d) $y_1(n)$ と $y_2(n)$ の時間遅れが同じであることを確かめよ .

2. FIR フィルタの設計に関して以下の問に答えよ .

- (a) 所望特性 $H_d(e^{j\omega})$ が次式で与えられる FIR フィルタ $H(z)$ を周波数サンプリング法により求めよ .

$$N = 8 \quad (6.56)$$

$$\omega T = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4 \quad (6.57)$$

に対して

$$H_d(e^{j\omega}) = 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1 \quad (6.58)$$

- i. 逆離散フーリエ変換 (IDFT) によりインパルス応答 $h(n)$ を $n = -7 \sim 7$ に対して求めよ .
 - ii. 上で求めた $h(n)$ を右側に 3.5 サンプルシフトしたものを改めて $h(n)$ とする . $h(n - 3.5) \rightarrow h(n), n = 0 \sim 7$. 但し , 3.5 サンプルのシフトは両側のサンプルの平均値を用いる (近似計算) . この $h(n)$ を用いて伝達関数 $H(z)$ を表せ .
- (b) 所望特性 $H_d(e^{j\omega})$ を与える FIR フィルタを零点配置と関数計算により求めよ .
 - i. 下記の条件より , 単位円上にある零点とそれに対する (部分) 伝達関数 $H_1(z), H_2(z), H_3(z)$ を求めよ .

$$\omega T = \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2 \text{ に対して} \quad (6.59)$$

$$H_d(e^{j\omega}) = 0, 0, 0, 0, 0 \quad (6.60)$$

- ii. $H_s(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z)$ を z^{-1} の高次多項式として表せ .
- iii. $H(z)$ のインパルス応答 $h(n)$ は $N = 8$ サンプルであるから ,
 $H_p(z) = h_p(0) + h_p(1)z^{-1} + h_p(2)z^{-2}$ とすると , 伝達関数は
 $H(z) = H_p(z)H_s(z)$ と表される . 下記の条件より $h_p(0), h_p(1), h_p(2)$
を求めよ .

$$\omega T = 0, \pi/4, 7\pi/4 \text{ に対して} \quad (6.61)$$

$$H_d(e^{j\omega}) = 1, 1, 1 \quad (6.62)$$

- iv. $H(z) = H_p(z)H_s(z)$ より $H(z)$ (インパルス応答 : $h(n)$) を求めよ .
- (c) 周波数サンプリング法で求めた $H(z)$ (インパルス応答 : $h(n)$) と零点配置と関数計算で求めた $H(z)$ (インパルス応答 : $h(n)$) がほぼ同じになることを示せ .
(参考) (a) における 3.5 サンプルシフトを正確に行えばこれらは等しくなる .