電子通信学会論文誌　別刷　Trans. IECE '81/11 Vol. J64-A No. 11

UDC [621.372.54:681.325.5].001.24

ディジタルフィルタの縦続構成における丸め雑音最小化手法

正　員　中山　謙二†

A Method to Minimize Round-Off Noise in Cascade Realization of Digital Filters

Kenji NAKAYAMA†, *Regular Member*

あらまし　ディジタルフィルタの縦続形構成において少ない計算回数で出力丸め雑音を最小にする零点と極の組合せ，並べ順を求める最適化手法について述べている．本論文では組合せ，並べ順の双方に制約条件を課してサーチすべき領域を極めて狭く限定し，その範囲で総当り法ないしは発見的手法を用いて最適解をサーチする方法を提案する．まず，出力丸め雑音を最小にするための組合せ，並べ順に対する条件を導く．この結果，組合せに対しては従来から提案されている方法を採用するが，並べ順に対しては新しい条件を提案している．これは２次区間の振幅特性におけるピーク周波数を各段において分散させるものである．本手法による条件付けられた領域における最適解の発生率は組合せのみに条件を課す従来の方法に比べて十分高くなっており，サーチ回数の低減が可能であることが幾つかの例題を通して確認できる．

1. まえがき

ディジタルフィルタの縦続構成は低感度，ハード構成の容易さなどの利点を有し，現在広範囲に応用されている．一般にディジタルフィルタ内部におけるデータの表現は有限であり，乗算器出力において丸め誤差が発生し，フィルタ出力に雑音となって現れる．縦続構成においてはこの丸め雑音が２次区間における零点と極の組合せ，並べ順に大きく依存している．従って，内部データ語長の低減，すなわち回路規模の低減のために，組合せ，並べ順の最適化手法の確立が重要な課題となっている．

組合せ，並べ順の最適化問題は最初 Jackson によって検討され一般ルールが提案されている[1],[2]．Jacksonの方法と類似の方法がLeeによって提案されている[3]．これらの方法においては出力丸め雑音を直接評価尺度とはしていない．Hwang や Lueder はダイナミックプログラミングの手法を用いる方法を提案している[4],[5]．これらの方法は出力丸め雑音を評価尺度としてフィルタの入力側の２次区間から最適化を行うもので，主として少ないサーチ回数でローカルな解を求めることを目的としている．このダイナミックプログラミングの方法において，組合せをあらかじめ Jackson ルールなどで決めて固定する方法も Dehner によって提案されている[6]．更に技術的判断を何ら必要としない発見的手法が Liu らによって提案されている[7]．

以上の従来方法において，例えば Jackson ルールはどのようなフィルタ特性に対しても常に最適解を保証することは難しい．又，発見的手法においては高次で且つ Q の高いフィルタにおいては依然として多くの計算回数を必要とする．Dehner の方法は並べ順のみ最適化を行えばよく計算回数の点では有効であると思われる．

これらに対して本論文では組合せ，並べ順の双方に制約条件を課し，極めて限定された領域で最適解をサーチする方法を提案するものである．まず，出力丸め雑音を最小にするための組合せ，並べ順に対する条件を導く．次にこれらの条件を課して極めて狭く限定された領域で総当り法ないしは発見的手法を用いて最適

† 日本電気株式会社伝送通信事業部，川崎市
Transmission Division, Nippon Electric Co., Ltd., Kawasaki-shi, 211 Japan

論文番号：昭 56-599[A-147]

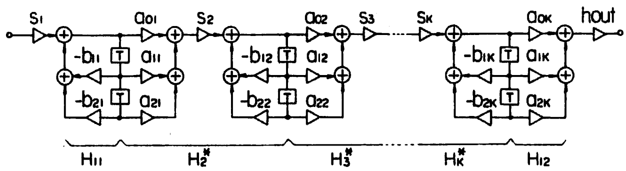


図1 1D形縦続構成
Fig.1 - Cascade realization with 1D form.

解を求めている．本手法によれば組合せのみに条件を課すDehner の方法に比べ更にサーチ回数を低減することができる．

2. 出力丸め雑音最小化の条件

2次区間の構成法としては1D形と2D形が知られている[2]．このうち2D形の方が良好な雑音特性を有するという結果が得られている．更に1D形においても準2D形を用いる方が有効である[6]．これは例えば図1に示す1D形縦続構成において，H_{11}とH_{12}に振幅特性が最も平たんな分母と分子を割り当てれば残りの$H_2{}^*$, $H_3{}^*$, …, $H_K{}^*$で構成される部分は2D形であることから全体として近似的に2D形とみることができる．従って，1D形における組合せ，並べ順の最適化問題は図2の2D形縦続回路で統一的に論じることができる．本論文では2D形のみを取り上げて以下の議論を展開することにする．

2.1 出力丸め雑音

図2の回路に対する伝達関数は次式で与えられる．

$$H(z)=h_{\mathrm{out}}\prod_{i=1}^{K} S_i \frac{a_{0_i}+a_{1_i}z^{-1}+a_{2_i}z^{-2}}{1+b_{1_i}z^{-1}+b_{2_i}z^{-2}} \tag{1}$$

S_iは入力側からi段目の2次区間に対するスケーリングファクタである．

ディジタルフィルタの内部データが2の補数で表されている場合は乗算器の入力においてオーバフローを阻止する必要がある[1]．乗算器入力のポイントが図2中$*i'$及び$*i$で示されている．フィルタ入力から各$*i'$，$*i$までの伝達関数$F'_i(z)$及び$F_i(z)$のL_pノルムがある値以下になるようにS_iが決められる．$F'_i(z)$と$F_i(z)$は次式で表される．

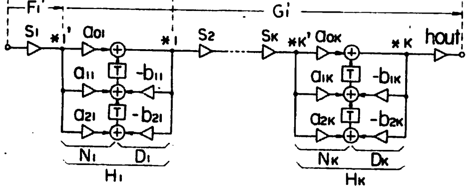


図2 2D形縦続構成
Fig.2 - Cascade realization with 2D form.

$$F'_i(z)=S_i\prod_{j=1}^{i-1}S_jH_j(z),\quad 2\leqq i\leqq K \tag{2a}$$

$$F'_1(z)=S_1 \tag{2b}$$

$$F_i(z)=\prod_{j=1}^{i}S_jH_j(z) \tag{3}$$

$$H_j(z)=\frac{a_{0_j}+a_{1_j}z^{-1}+a_{2_j}z^{-2}}{1+b_{1_j}z^{-1}+b_{2_j}z^{-2}}=\frac{N_j(z)}{D_j(z)} \tag{4}$$

スケーリングファクタS_iはフィルタの入力側から順に

$$\max\{\|F'_i(e^{j\omega})\|_p,\ \|F_i(e^{j\omega})\|_p\}\leqq A \tag{5}$$

を満足するように決められる．ここでzを$e^{j\omega}$としている．$\|\cdot\|_p$はL_pノルムを表し，Aは内部データのダイナミックレンジを表している．式(5)において

$$A=1 \tag{6}$$

としても一般性は失わない．又，$\|F'_i(e^{j\omega})\|_p$の条件は次のように置き換えられる．

$$S_i\leqq 1 \tag{7}$$

今，常に式(7)が成り立っているとするとS_iは$F_i(z)$のみによって決まり次式で与えられる．

$$S_i=\frac{\|\prod_{j=1}^{i-1}H_j(e^{j\omega})\|_p}{\|\prod_{j=1}^{i}H_j(e^{j\omega})\|_p},\quad 2\leqq i\leqq K \tag{8a}$$

$$S_1=\|H_1(e^{j\omega})\|_p^{-1} \tag{8b}$$

pの値は入力信号の性質によって決められる．一般に入力信号時系列のサンプル間に相関性がない場合は$p=2$，正弦波などのように相関性がある場合は$p=\infty$が用いられる．

丸め雑音源はスケールファクタとフィルタ係数に対応する乗算器であり，これらからフィルタ出力までの伝達関数は図2の中で各々$G'_i(z)$及び$G_i(z)$として示されており次式で与えられる．

$$G'_i(z)=h_{\mathrm{out}}H_i(z)\prod_{j=i+1}^{K}S_jH_j(z),\quad 1\leqq i\leqq K-1 \tag{9a}$$

$$G'_K(z)=h_{\text{out}}H_K(z) \tag{9b}$$

$$G_i(z)=\frac{h_{\text{out}}}{D_i(z)}\prod_{j=i+1}^{K}S_jH_j(z),\ 1\leqq i\leqq K-1 \tag{10a}$$

$$G_K(z)=\frac{h_{\text{out}}}{D_K(z)} \tag{10b}$$

全体の出力丸め雑音は各雑音源が互いに独立であるという条件下に次式で与えられる．

$$N=\frac{\sigma^2}{2\pi}\sum_{i=1}^{K}\int_{-\pi}^{\pi}(|G'_i(e^{j\omega})|^2+m|G_i(e^{j\omega})|^2)d\omega \tag{11}$$

ここでσ^2は1個の乗算器から発生する丸め雑音の分散である．図2におけるH_iはフィルタ入力からi段目の2次区間を示している．

2.2 零点と極の組合せ，並べ順に対する最適条件の導入

ここでは式(11)を更に変形する．S_iとh_{out}の積は与えられた伝達関数によって決まる一定値であり

$$h_{\text{out}}\prod_{i=1}^{K}S_i=h_0\ \text{（一定値）} \tag{12}$$

と表すことができる．この関係を用いて式(9)，(10)は次のように変形される．

$$G'_i(z)=h_0H_i(z)\prod_{k=1}^{i}S_k^{-1}\prod_{j=i+1}^{K}H_j(z),\ 1\leqq i\leqq K-1 \tag{13a}$$

$$G'_K(z)=h_0H_K(z)\prod_{k=1}^{K}S_k^{-1} \tag{13b}$$

$$G_i(z)=\frac{h_0}{D_i(z)}\prod_{k=1}^{i}S_k^{-1}\prod_{j=i+1}^{K}H_j(z),\quad 1\leqq i\leqq K-1 \tag{14a}$$

$$G_K(z)=\frac{h_0}{D_K(z)}\prod_{k=1}^{K}S_k^{-1} \tag{14b}$$

更に式(8a)より

$$\prod_{k=1}^{i}S_k^{-1}=\|\prod_{k=1}^{i}H_k(e^{j\omega})\|_p \tag{15}$$

が成り立つ．これらの表現を用いれば式(11)のNは

$$N=\frac{\sigma^2}{2\pi}\sum_{i=1}^{K}h_0^2\|\prod_{k=1}^{i}H_k(e^{j\omega})\|_p^2\int_{-\pi}^{\pi}|\prod_{j=i+1}^{K}|H_j(e^{j\omega})|^2\cdot\left(|H_i(e^{j\omega})|^2+\frac{m}{|D_i(e^{j\omega})|^2}\right)d\omega \tag{16a}$$

但し，$\displaystyle\prod_{j=i+1}^{K}H_j(z)=1,\quad i=K$ (16b)

更に

$$N=\sigma^2\sum_{i=1}^{K}h_0^2\|\prod_{k=1}^{i}H_k(e^{j\omega})\|_p^2\left\{\|\prod_{j=i}^{K}H_j(e^{j\omega})\|_2^2+m\left\|\frac{\prod_{j=i+1}^{K}H_j(e^{j\omega})}{D_i(e^{j\omega})}\right\|_2^2\right\} \tag{17}$$

と変形される．上式から分かるように出力丸め雑音に対する第i段目からの寄与はフィルタ入力から第i段までと，第i段からフィルタ出力までの伝達関数のL_pノルムの積として求まる．このとき前者はL_2又はL_∞ノルムで，後者は常にL_2ノルムで評価される．式(17)の表現を基に最適化条件を求めるがその基礎となる補題をここで与えておく．証明は末尾の付録に示す．

［補題1］

x_iを変数，α_iを定数とするとき，

$$0<x_n\quad\text{且つ}\quad 0<\alpha_n \tag{18}$$

に対して次の不等式が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^{N}x_n\sum_{n=1}^{N}\alpha_nx_n^{-1}\geqq\left(\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\alpha_n}\right)^2,\ N\geqq 2 \tag{19}$$

等号はすべてのnに対して次式が成り立つときである．

$$x_n=r\sqrt{\alpha_n},\quad r\text{：正の比例定数} \tag{20}$$

［補題2］

x_nを変数，α_nを定数とするとき，

$$0<x_n\quad\text{且つ}\quad 0<\alpha_n \tag{18}$$

に対して次の不等式が成り立つ

$$\max_n(x_n)\sum_{n=1}^{N}\alpha_nx_n^{-1}\geqq\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \tag{21}$$

等号はすべてのnに対して次式が成り立つときである．

$$x_n=\max_n(x_n) \tag{22}$$

式(17)の第1項をN_1として式(23)で表す．

$$N_1=\sum_{i=1}^{K}\|\prod_{k=1}^{i}H_k(e^{j\omega})\|_p^2\cdot\|\prod_{j=i}^{K}H_j(e^{j\omega})\|_2^2=\sum_{i=1}^{K}N_{1i} \tag{23}$$

次に
$$|\prod_{j=i}^{K}H_j(e^{j\omega})|=\frac{|h_0^{-1}H(e^{j\omega})H_i(e^{j\omega})|}{|\prod_{k=1}^{i}H_k(e^{j\omega})|} \tag{24}$$

の関係式において

$$\tilde{H}_i(z)=\prod_{k=1}^{i}H_k(z) \tag{25}$$

$$\hat{H}_i(z)=H_i(z)H(z)h_0^{-1} \tag{26}$$

とおく．更に式(23)のL_pノルムは分割数Nを十分大きく取れば次の離散系の表現で近似できる．

$$\|\tilde{H}_i(e^{j\omega})\|_p\cong\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|^p\right\}^{1/p} \tag{27}$$

$$\|\prod_{j=i}^{K}H_j(e^{j\omega})\|_2\cong\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|\hat{H}_i(e^{jn\omega_0})/\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|^2\right\}^{1/2}$$

$$\omega_0=2\pi/N \tag{28}$$

これらよりN_{1i}は次式で表される．

$$N_{1i} \cong \left\{ \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\hat{H}_i(e^{jn\omega_0})|^2}{|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|^2} \right)^{1/2} \right\}^2 \tag{29}$$

ここですべての i に対して

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{H}_i(e^{jn\omega_0})| \tag{30a}$$

又は

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{H}_i(e^{jn\omega_0})|^2 \tag{30b}$$

が最小となるように零点と極が組み合されたと仮定する．次に並べ順によって N_{1i} を最小化する場合には $\hat{H}_i(z)$ は固定して考えることができる．式(29)において $|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|$ を正の変数，$|\hat{H}_i(e^{jn\omega_0})|$ を正の定数とみなしたとき，補題1，2より

$$N_{1i} \geqq \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{H}_i(e^{jn\omega_0})| \right)^2, \quad p=2 \tag{31a}$$

$$N_{1i} \geqq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{H}_i(e^{jn\omega_0})|^2, \quad p=\infty \tag{31b}$$

が成り立つ．等号はすべての n に対して，

$$|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})| = r|\hat{H}_i(e^{jn\omega_0})|^{1/2}, \quad p=2 \tag{32a}$$

$$|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})| = \max_n |\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|, \quad p=\infty \tag{32b}$$

が成り立つときである．式(31)において右辺は仮定により最小化されているから式(32)を満たす $\tilde{H}_i(z)$ は N_{1i} の最小値を与えることになる．

次に式(17)の第2項を N_2 とし次のように表す．

$$N_2 = \sum_{i=1}^{K} m \| \prod_{k=1}^{i} H_k(e^{j\omega}) \|_p^2 \cdot \| \prod_{j=i+1}^{K} H_j(e^{j\omega}) / D_i(e^{j\omega}) \|_2^2 \tag{33a}$$

$$= \sum_{i=1}^{K} N_{2i} \tag{33b}$$

N_{2i} は $\tilde{H}_i(z)$ を用いて次のように表すことができる．

$$N_{2i} \cong m \left\{ \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\hat{D}_i(e^{jn\omega_0})|^2}{|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|^2} \right)^{1/2} \right\}^2 \tag{34}$$

ここで

$$\hat{D}_i(z) = \frac{h_0^{-1} H(z)}{D_i(z)} \tag{35}$$

である．$\hat{D}_i(z)$ は組合せ，並べ順によらず一定値であり $\tilde{H}_i(z)$ の最適化においては固定して考えることができる．N_{1i} のときと同様にして補題1，2より

$$N_{2i} \geqq m \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{D}_i(e^{jn\omega_0})| \right)^2, \quad p=2 \tag{36a}$$

$$N_{2i} \geqq m \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{D}_i(e^{jn\omega_0})|^2, \quad p=\infty \tag{36b}$$

等号はすべての n に対して次式が成り立つときである．

$$|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})| = r|\hat{D}_i(e^{jn\omega_0})|^{1/2}, \quad p=2 \tag{37a}$$

$$|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})| = \max_n |\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|, \quad p=\infty \tag{37b}$$

$\hat{D}_i(z)$ は一定値であるから，式(37)を満足する $\tilde{H}_i(z)$ は N_{2i} に対して最小値を与えることになる．

$p=2$ における条件は平方根を取っており $|\tilde{H}_i(e^{j\omega})|$ に対して1を中心とする平たん化方向である．更に，$p=\infty$ の場合は完全な平たん化条件となっている．これらを考慮して統一的な最適化条件として次の条件を設定する．「すべての i に対して $|\tilde{H}_i(e^{j\omega})|$ を平たん化する」．

次にこの条件を組合せ，並べ順に対する条件に置換する．この置換は2段階に分けて考えられる．

第1段階：　入力側の第1段目においては

$$\tilde{H}_1(z) = H_1(z) \tag{38}$$

であるから，$H_1(z)$ 自身が平たん化される必要がある．

更に第2段目においては

$$\tilde{H}_2(z) = H_1(z) H_2(z) \tag{39}$$

であり $H_1(z)$ の平たん化を考慮すると $H_2(z)$ も平たん化されている必要がある．この考え方を繰り返せば，最適化の第1段階としてすべての $k(=1, 2, \cdots, K)$ に対して $H_k(z)$ が平たん化されることが必要である．$|H_k(e^{j\omega})|$ の形状は極の Q に大きく依存しており，この平たん化に対しては従来から提案されている方法，すなわち，Q の高い極から順に近くに配置されている零点を組み合せる方法（本論文では High Q First Pairing と呼ぶ）が有効であり本論文でもこれを採用する．

第2段階：　$H_k(z)$ の振幅が平たん化されたといっても一般に完全な平たん化は不可能でありピーク性は残る．従って，2次区間の並べ順において各区間のピーク性を互いに相殺する必要がある．2次区間の振幅特性を特徴づけるパラメータとして，ここではピーク周波数とピーク値（$=Q$）の二つに着目する．$\tilde{H}_i(z)$ に含まれる2次区間のピーク周波数を分散させることにより互いのピーク性を相殺することができる．更に，$H_1(z)$ と $H_K(z)$ には特に注意を払う必要がある．$\tilde{H}_1(z)$ は他の2次区間との相殺ができないため比較的 Q の低い区間を配置する必要がある．又，$H_K(z)$ からの雑音伝達関数は $1/D_K(z)$ で決まるから $D_K(z)$ にも Q の低い極を割り当てることが望ましい．

Jackson ルールは2次区間のピーク値（$=Q$）のみに着目しているのに対して，本論文では主としてピーク周波数に着目する点が大きな特徴である．

ここで採用する組合せ，並べ順に対する最適化条件

をもう一度要約する．

(1) 組合せ： Qの高い極から順に近くに配置されている零点を組み合せる．

(2) 並べ順： すべてのiに対して$\tilde{H}_i(z)$に含まれる2次区間のピーク周波数が分散するように2次区間を並べる．

3. 組合せ，並べ順の最適化手法

3.1 最適化手法

本論文で提案する最適化手法は前章で求めた条件を課して得られるごく限られたサーチ領域において総当り法ないしは発見的手法を用いるものである．このような方法を採用する理由は次の点である．

(1) どのようなフィルタ特性に対しても常に最適解を保証する統一的ルールの確立は一般に困難である．

(2) 組合せ，並べ順の双方に条件を課すことによりサーチする領域を極めて狭く限定できる．

(3) ダイナミックプログラミングなどはローカルな解を求めるもので必ずしも最適解を保証していない．

ここで提案する最適化手法のフローチャートを図3に示す．極と2次区間のピーク値（$=Q$）は次式で定義される．

$$P[D_i]=\frac{\|D_i(e^{j\omega})\|_2}{\|D_i(e^{j\omega})\|_\infty} \tag{40a}$$

$$P[H_i]=\frac{\|H_i(e^{j\omega})\|_\infty}{\|H_i(e^{j\omega})\|_2} \tag{40b}$$

3.2 並べ順に対する条件付加

組合せについてはHigh Q First Pairingのルールでほぼ一意的に決まる．ここでは並べ順に対する条件付加を具体例を用いて述べる．

並べ順に対する条件は前述のごとくピーク周波数の分散である．ピーク周波数の小さい順に並べられた2次区間をh_iとする．すなわち，h_iのピーク周波数を$P_f(h_i)$とすると，

$$P_f(h_1)<P_f(h_2)<\cdots<P_f(h_K) \tag{41}$$

が成り立つ．ここで$K=8$として分散の例を示す．まず，$h_1\sim h_8$を表1(a)のごとくグループに分ける．すべての段におけるh_iの分散は隣り合っている段に割り当てるグループが同じにならないようにすればよい．i段目の2次区間をH_iで表して割当の例を表1(b)に示す．

表1で与えられた並べ順に対する制約条件は，例えば(I)においてはH_1にh_1かh_2のいずれかが選択され，H_2にはh_5かh_6のいずれかが選択されることを示して

表1 並べ順に対する制約条件の例

(a)

	h_1 h_2	h_3 h_4	h_5 h_6	h_7 h_8
グループ分け	1	2	1	2
	A		B	

(b)

制約条件	段	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8
(I)	グループ	$A1$	$B1$	$A2$	$B2$	$A1$	$B1$	$A2$	$B2$
	2次区間	h_1	h_5	h_3	h_7	h_1	h_5	h_3	h_7
		h_2	h_6	h_4	h_8	h_2	h_6	h_4	h_8
(II)	グループ	$A2$	$B2$	$A1$	$B1$	$A2$	$B2$	$A1$	$B1$
	2次区間	h_3	h_7	h_1	h_5	h_3	h_7	h_1	h_5
		h_4	h_8	h_2	h_6	h_4	h_8	h_2	h_6

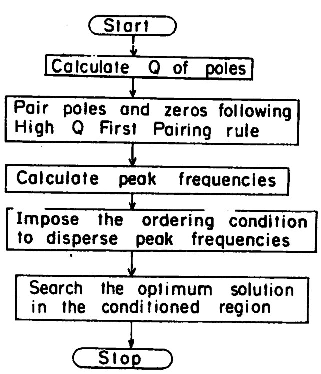


図3 最適化手法のフローチャート
Fig.3 - Flow chart of optimization method.

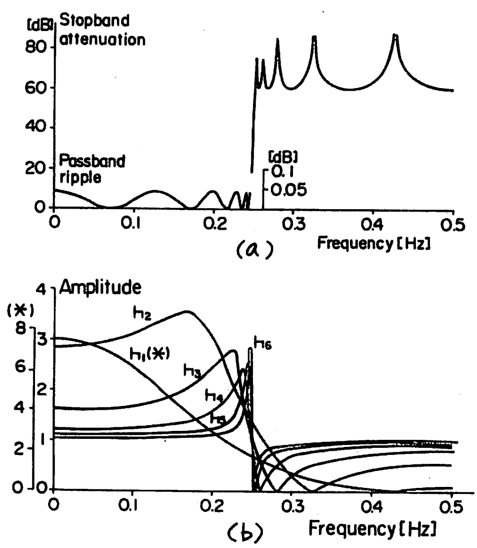


図4 (a) 損失特性 (b) 2次区間の振幅特性
Fig.4 - (a) Loss. (b) Amplitude of section.

いる．ピーク周波数を分散するための条件は(I)と(II)のように何とおりか考えられる．このうちどの条件を選ぶかはH_1とH_8に比較的Qの低い区間を割り当てるという条件を加味して決められる．これらの例における並べ順の総数は16とおりであり，条件を付加しない場合の総数8! = 40,328 とおりに対して約0.04%に限定されている．16とおり程度であれば総当り法を用いても計算回数の点で特に問題とはならない．更に 30 次程度においても表1の例題と同様に考えれば，条件付加による総数は約128とおり程度であり階乗の割合では増加しないことが分かる．総数が128とおり程度においては発見的手法が有効となる．

以上述べてきたように，本論文で提案する最適化手法はサーチする範囲を極めて狭く限定しているためフィルタの次数にかかわらず常に少ないサーチ回数で最適解を求めることが可能である．

4. 例　　　題

［例題1］ 12次チェビシェフ形低域フィルタ（LPF）

伝達関数の係数値を表2に，フィルタ全体の損失特性と各2次区間の振幅特性を図4に示す．図4の2次区間においてはHigh Q First Pairing が行われている．組合せと並べ順に対する制約条件を表3に示す．本論文では各条件下における解の分布を統計的に調べている．まず制約条件を付加しない状態（No constraints）でランダムに800とおりを選択しその出力丸め雑音の分布を求めた．その結果を表4に示す．ここでは縦軸が組合せ，並べ順の発生率を百分率で示し，横軸が最適解からの雑音の劣化量を示している．又，<>の中の数はサーチ回数を表している．次に組合せについて条件を課した場合（Pairing constraint）についてランダムに150とおりの並べ順を選択し，同様にして出力丸め雑音の分布を求めた．更に組合せのほか並べ順の条件も課したとき（Pairing and ordering constraints）の36とおりすべてについて分布を求めた．最後にJacksonルールで求めた結果も矢印で示す．この表から分かるように組合せのみに制約条件を課した場合でも最適解の発生率は高くなる．しかし，並べ順に対して条件付加することにより，その発生率は更に高くなっており本手法の有効性が確認できる．Jacsonルールで求めた解はL_∞スケーリングにおいては最適解（条件無付加）から4.4 dB，更に条件付加時の最適解からは5.5 dB劣化している．

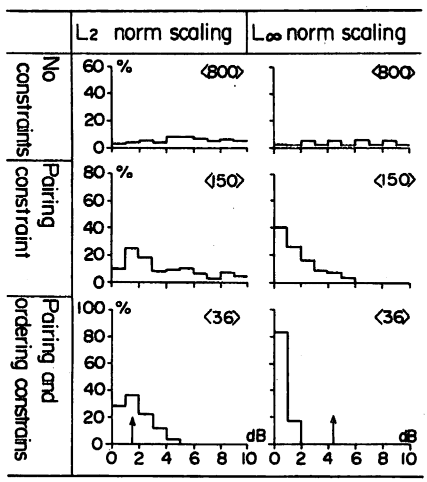
表2　伝達関数の係数値

12次チェビシェフ形　LPF						
	h_0	0.02186609				
	a_0	a_1	a_2		b_1	b_2
n_1	1	1.792513	1	d_1	−0.683156	0.181791
n_2	1	0.907347	1	d_2	−0.451731	0.471021
n_3	1	0.357262	1	d_3	−0.237274	0.740479
n_4	1	0.124827	1	d_4	−0.120059	0.888928
n_5	1	0.034269	1	d_5	−0.068666	0.956950
n_6	1	0.003352	1	d_6	−0.050439	0.988865

表3　組合せ，並べ順に対する制約条件

組合せ	d_i	1	2	3	4	5	6
	n_i	1	2	3	4	5	6
並べ順	H_i	1	2	3	4	5	6
	d_i	456	123	456	123	456	123

表4　出力丸め雑音の分布



［例題2］ 12次バタワース形LPF

伝達関数の係数値を表5に，フィルタ特性を図5に示す．バタワースフィルタは表5の係数値からも分かるように，極がすべて同一周波数に位置し，零点はすべて$\omega T = \pi$ に位置している．従って，組合せは1とおりしかない．更に並べ順に対しては表6に示すようにH_1とH_6に比較的低Qの2次区間を配し，且つピーク周波数を分散させる制約条件を採用する．例題1と同様にして求めた出力丸め雑音の分布を表7に示す．この例では本手法による最適解の発生率が100%になっており有効性が確認できる．又，Jacksonルールで得た解もほぼ最適解となっている．これはJacksonルールの方向がピーク周波数の分散と合うためである．例

表5 伝達関数の係数値

12次バタワース形 LPF						
h_0 0.0009043						
	a_0	a_1	a_2		b_1	b_2
n_1	1	2	1	d_1	0	0.004296
n_2	1	2	1	d_2	0	0.039566
n_3	1	2	1	d_3	0	0.115229
n_4	1	2	1	d_4	0	0.243192
n_5	1	2	1	d_5	0	0.446463
n_6	1	2	1	d_6	0	0.769088

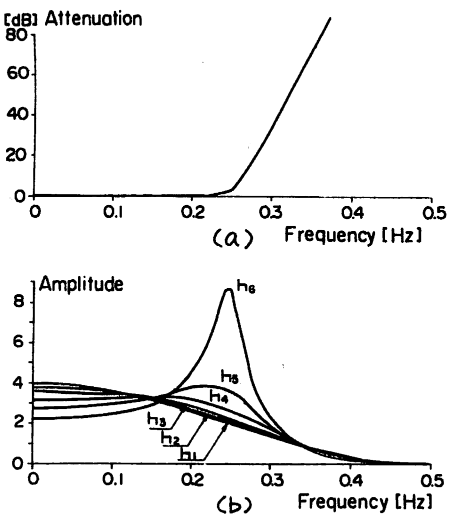


図5 (a) 損失特性 (b) 2次区間の振幅特性
Fig.5- (a) Loss. (b) Amplitude of section.

表6 並べ順に対する制約条件

並べ順	H_i	1	2	3	4	5	6
	d_i	1 2	5 6	3 4	1 2	5 6	3 4

表7 出力丸め雑音の分布

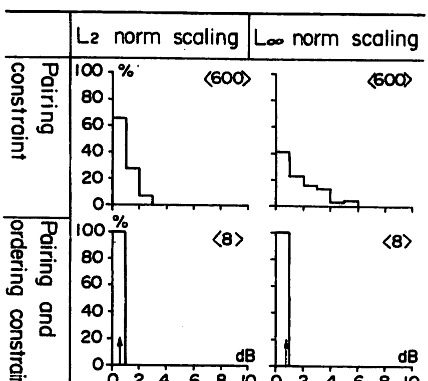


表8 伝達関数の係数値

16次チェビシェフ形 BPF						
h_0 0.006205						
	a_0	a_1	a_2		b_1	b_2
n_1	1	−1.855647	1	d_1	−1.012218	0.978113
n_2	1	−1.399751	1	d_2	−0.934500	0.917042
n_3	1	−1.195890	1	d_3	−0.742773	0.804937
n_4	1	−1.129707	1	d_4	−0.355583	0.662947
n_5	1	0.961329	1	d_5	0.167024	0.657788
n_6	1	1.036374	1	d_6	0.558520	0.797416
n_7	1	1.271457	1	d_7	0.753873	0.912868
n_8	1	1.819624	1	d_8	0.832360	0.976907

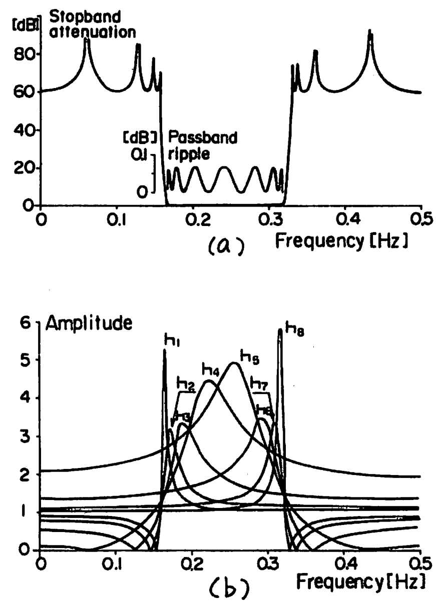


図6 (a) 損失特性 (b) 2次区間の振幅特性
Fig.6- (a) Loss. (b) Amplitude of section.

題1においてはこの方向が必ずしも合っていない．バタワース形は極のQが低いため全体として並べ順に対する依存性が低くなっている．

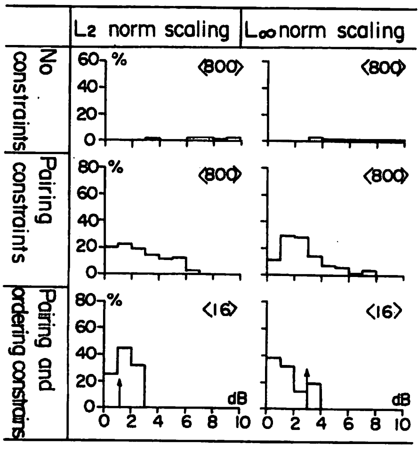
［例題3］ 16次チェビシェフ形帯域フィルタ (BPF)

伝達関数の係数値を表8に，フィルタ特性を図6に，制約条件を表9に，更に，出力丸め雑音の分布を表10に示す．表10における規準は組合せ条件下の最適解を用いている．制約なしで求めた最適解はこの基準から3.3 dB劣化している．表10の結果は例題1とほぼ同じ傾向を示している．

表9　組合せ，並べ順に対する制約条件

組合せ	d_i	1	2	3	4	5	6	7	8
	n_i	4	3	2	1	8	7	6	5
並べ順	H_i	1	2	3	4	5	6	7	8
	d_i	34	78	12	56	34	78	12	56

表10　出力丸め雑音の分布



5. むすび

ディジタルフィルタの縦続形構成における出力丸め雑音最小化のための組合せ，並べ順に対する新しい最適化手法を提案した．本手法における条件付けられた領域での最適解の発生率は従来法に比べて高くなっており，サーチ回数の低減が可能となることが幾つかの例題を通して確認された．

文　　献

(1) Jackson, L.B.: "On the interaction of roundoff noise and dynamic range in digital filters", Bell Syst. Tech. J., 49, pp. 159-184 (Feb. 1970).

(2) Jackson, L.B.: "Roundoff noise analysis for fixed-point digital filters realized in cascade or parallel form", IEEE Trans. Audio & Electroacoust. AU-18, pp. 107-122 (June 1970).

(3) Lee, W.S.: "Optimization of digital filters for low roundoff noise", IEEE Trans. Circuits & Syst., CAS-21, pp. 424-431 (May 1974).

(4) Hwang, S.Y.: "On optimization of cascade fixed-point digital filters", IEEE Trans. Circuit Theory, CT-21, pp. 163-166 (Jan. 1974).

(5) Lueder, E.: "Minimizing the roundoff noise of digital filters by dynamic programming", Frequenz, 29, pp. 211-214 (1975).

(6) Dehner, G.: "A contribution to the optimization of roundoff noise in recursive digital filters", Arch. Elektron & Uebertragungstech., 29, 12, pp. 505-510 (Dec. 1975).

(7) Liu, B. and Peled, A.: "Heuristic optimization of the cascade realization of fixed-point digital filters", IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Process., ASSP-23, pp. 464-473 (Oct. 1975).

付　　録

補題1の証明

式(19)の左辺をAとし，次のように変形する．

$$A=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ \neq i}}^{N}x_i\alpha_j x_j^{-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j>i}^{N}(\alpha_j x_i x_j^{-1}+\alpha_i x_i^{-1}x_j)\quad(\text{A・1})$$

更に

$$X_{ij}=x_i x_j^{-1},\quad i<j\quad(\text{A・2})$$

とおく．

$$A=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j>i}^{N}(\alpha_j X_{ij}+\alpha_i X_{ij}^{-1})\quad(\text{A・3})$$

ここでX_{ij}は互いに独立変数であるから，式(A・3)の第2項は個々のi, jに対して独立に最小化できる．一般に

$$\alpha_j X_{ij}+\alpha_i X_{ij}^{-1}\geq 2\sqrt{\alpha_i\alpha_j}\quad(\text{A・4})$$

が成り立ち，等号は次式が成り立つときである．

$$X_{ij}=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}}\quad(\text{A・5})$$

式(A・5)が成り立つとき，式(A・3)のAは次式を満たす．

$$A\geq\sum_{n=1}^{N}\alpha_n+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j>i}^{N}\sqrt{\alpha_i\alpha_j}=\left(\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\alpha_n}\right)^2\quad(\text{A・6})$$

式(A・5)からx_nは

$$x_n=r\sqrt{\alpha_n}\quad(r：\text{正の比例定数})\quad(\text{A・7})$$

で与えられる．（証明終）

補題2の証明

式(21)におけるx_nは互いに独立であり，$\alpha_n x_n^{-1}$を各々，独立に最小化できる．

$$x_n\leq\max_n(x_n)\quad(\text{A・8})$$

であるから

$$\max_n(x_n)\alpha_n x_n^{-1}\geq\alpha_n\quad(\text{A・9})$$

となり，等号は

$$x_n=\max_n(x_n)\quad(\text{A・10})$$

のときである．（証明終）

（昭和56年2月19日受付，5月27日再受付）