

スイッチトキャパシタフィルタにおける 離散近似の一方法

正員 伏見 重雄[†] 正員 中山 謙二[†]

A Discrete Optimization Method of Switched Capacitor Filters

Shigeo FUSHIMI[†] and Kenji NAKAYAMA[†], *Regular Members*

あらまし スイッチトキャパシタフィルタ (SCF) をモノシリック IC 上で構成する際、全てのキャパシタをある単位容量の整数倍という形で実現すると、小さな単位容量を用いて高い容量比精度が得られ、SCF の小形化、低消費電力化に有効である。本論文では、SCF の離散近似に対してある周波数点におけるフィルタ特性の感度を近似領域の全周波数点における感度の絶対値和で割った“規格化された感度”という尺度を導入し、その尺度に基づき離散近似に有効な変数を選択する方法を提案する。近似誤差の評価尺度としては最大偏差を最小化する Min-Max 法を採用している。離散値からなる初期値を決定する方法としては、量子化前の容量に正定数を掛け整数化したあとで、容量比の二乗平均誤差を最小化する方法を用いている。最後にバイカッドの縦続構成による 8 次帯域通過フィルタ、およびリブフロッグ構成の 5 次低域通過フィルタに対して本離散近似方法を適用しその有効性を確認している。

1. ま え が き

スイッチトキャパシタフィルタ (SCF) の特性はキャパシタの容量比で決定され、MOS 技術を用いるとこの容量比はキャパシタの面積比という形で取り扱うことができる^{(1),(2)}。容量比に対するエッチングエラーの影響を低減するために、SCF に用いられるキャパシタの容量は、単位容量の整数倍の容量と単位容量で整数化できない容量の和で実現されている⁽³⁾。しかし、SCF 内に単位容量に近い値を持つキャパシタが複数個存在する場合には、それらのキャパシタ間における容量比精度を確保するために単位容量を大きくする必要があるのである。そのため、キャパシタ占有面積の増大、オペアンプの負荷容量の増大等、IC のチップ面積や消費電力の点で好ましくない問題がある。

一方、全てのキャパシタの容量が単位容量の整数倍で表わされる場合には、小さな単位容量で高い容量比精度が得られ、高精度 SCF を小さなチップ面積と低消費電力で実現することができる。

デジタルフィルタの分野では、フィルタ係数を変数とし、その取り得る値をある単位量の整数倍に制限し、フィルタ特性を近似する離散近似問題が従来から活発に研究されている。巡回形フィルタにおいては、主として次のような方法が提案されている。それは、素子感度で選ばれた変数の組に対して指定された範囲内で総当りを行なう方法⁽⁴⁾、上記方法においてランダムサーチを用いる方法⁽⁵⁾、サーチする範囲を順次拡大する方法⁽⁶⁾、また、全ての変数についてランダムサーチする方法⁽⁷⁾、粗いグリッドと細いグリッドを組み合わせた 2 段階ランダムサーチ法⁽⁸⁾、線形な条件を課した Branch & Bound 法、分岐点において特性偏差の判定を行ない分岐路を制限する非線形整数計画法⁽⁹⁾、さらには、複数個の変数の組に対して整数化と逐次近似を組み合わせる方法⁽¹⁰⁾などである。

一方、SCF はフィルタ特性が容量比で決まることや、近似に使用できる変数の数が零点や極の自由度に比べて多いという特徴を有している。従って、このような SCF 固有の性質に基づく離散近似方法の開発が重要であると思われる。

本論文では、ある周波数点におけるフィルタ特性の感度を近似領域の全周波数点における感度の絶対値和

[†] 日本電気株式会社伝送通信事業部, 川崎市
Transmission Division, NEC Corporation, Kawasaki-shi,
211 Japan

で割った“規格化された感度”という尺度を導入し、この尺度に基づき離散近似に有効な変数を選択する方法を提案している。また、近似誤差の評価尺度としてはMin-Max法を採用している。初期値決定法としては、容量比の二乗平均誤差を最小化する方法を用いている。最後に、バйкаッドの縦続構成による8次帯域通過フィルタとリーブフロッグ構成の5次低域通過フィルタを例題として、本方法の有効性を確認している。

2. 離散近似アルゴリズム

2.1 離散近似の定式化

ある単位量の整数倍の値を持つ M 個の変数 x_1, x_2, \dots, x_M からなる変数ベクトルを \mathbf{x} とする。

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_M) \quad (1)$$

\mathbf{x} を含む周波数 ω を独立変数とする関数 $H(\omega, \mathbf{x})$ を $H(\omega, \mathbf{x}) = H(\omega, x_1, x_2, \dots, x_M)$ (2)

と表わす。

ここでは、 $H(\omega, \mathbf{x})$ を ω のある定められた領域 Ω_0 内の N 個の周波数点 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ 上であらかじめ与えられた目的関数 $G(\omega)$ に近似する問題を扱う。それは $\omega \in \Omega_0$ なる領域で $H(\omega, \mathbf{x})$ と $G(\omega)$ との偏差 $D(\omega, \mathbf{x})$ の最大値を最小化することに帰着させることができる。偏差 $D(\omega, \mathbf{x})$ を

$$D(\omega, \mathbf{x}) = D(\omega, x_1, x_2, \dots, x_M) \quad (3)$$

と表わす。適当な正値を持つ荷重関数を $W(\omega)$ とし

$$D(\omega, \mathbf{x}) = W(\omega) |H(\omega, \mathbf{x}) - G(\omega)| \quad (4)$$

と定義すると、この近似問題は

$$\text{Min}_{\mathbf{x}} [\text{Max}_{\omega \in \Omega_0} [D(\omega, \mathbf{x})]] \quad (5)$$

と定式化することができる。

次に、式(4)において任意の周波数点 ω_l での偏差を $D(\omega_l, \mathbf{x})$ とすると、

$$D(\omega_l, \mathbf{x}) = W(\omega_l) |H(\omega_l, \mathbf{x}) - G(\omega_l)| \quad (6)$$

$$l = 1, 2, \dots, N$$

と表現される。

ここで、式(5)の近似問題は N 個の周波数点上で式(6)の最大値を最小化することに帰着させることができる。

2.2 規格化された感度

式(1)で示した変数ベクトル \mathbf{x} の各要素は最小幅(量子化幅)で量子化された離散値だけをとるものとする。ここで、総当たり法を用い、 p 個の変数がある離散値、およびその上下に量子化幅の q 倍変動させた場合の組合せ総数 NT を求めると

$$NT = (2 \cdot q + 1)^p \quad (7)$$

となり、 NT は動かす変数の変動幅 $(2q+1)$ の p 乗に比例し、 p, q の増大に伴い相当大きな値となり得る。

従って、離散近似では、偏差を減少させるために有効な変数をいかに数少なく選択するかということが重要となる。従来方法では、図1に示すように最大偏差の生ずる周波数点 ω_K において感度の大きな変数を選択していた⁽⁴⁾。しかし、 ω_K において大きな感度を持つと同時に、他の周波数点においても大きな感度を持つとすると、他の周波数点における特性に影響を与えず ω_K 点での偏差だけを減少させることは難しい。そこで、本論文では、以下に述べる“規格化された感度”という尺度を導入し、近似に有効な変数を選択している。

まず、変数 x_i の任意の周波数点 ω_l における感度を $T_i = (t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,N})$ (8)

$$t_{i,l} = \Delta H(\omega_l, \mathbf{x}) / \Delta x_i \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, M, \quad l = 1, 2, \dots, N$$

とする。但し、式(9)の場合に限り Δx_i は連続値をとるものとする。任意の周波数点 ω_l における規格化された感度を

$$S_l = (s_{1,l}, s_{2,l}, \dots, s_{M,l}) \quad (10)$$

と表わし、変数 x_i の ω_l における規格化された感度 $s_{i,l}$ を式(10)で定義する。

$$s_{i,l} = t_{i,l} / \sum_{r=1}^N |t_{i,r} \cdot W(\omega_r)| \quad (11)$$

次に、最大偏差の生ずる周波数点 ω_K における規格化された感度 S_K を用いると、近似に有効な変数が選択できることを図2を用いて説明する。

まず、 ω_K における変数 x_i と変数 x_j の規格化された感度を、それぞれ $s_{i,K}, s_{j,K}$ とし、感度を $t_{i,K}, t_{j,K}$ とする。図2で示すように

$$|t_{i,K}| > |t_{j,K}| \quad (12)$$

とし、 x_i は ω_K 以外の周波数点で $|t_{i,K}|$ 以上の感度を持つものとする。もし、このような感度特性を持つ

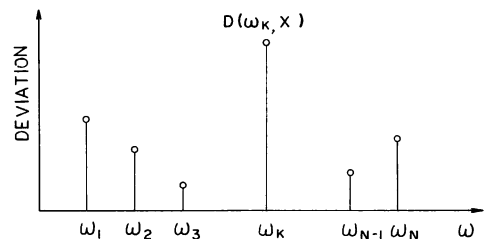


図1 各周波数点における偏差
Fig.1-Deviations at each frequency.

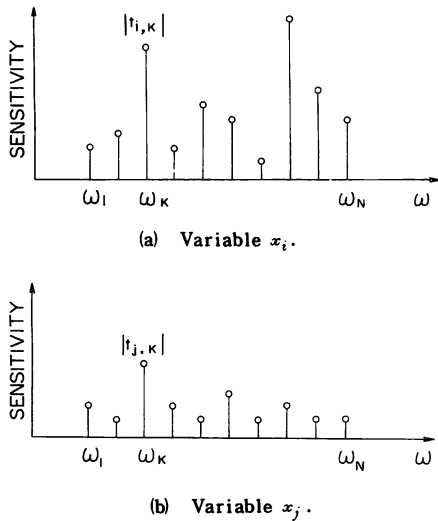


図2 変数 x_i と変数 x_j の感度
Fig.2-Sensitivities of variables x_i and x_j .

変数 x_i を近似に用いると、 ω_k における偏差は減少させることができるが、他の周波数点において大きな偏差が生ずる可能性がある。一方、変数 x_j では、 ω_k における感度は x_i に比べて小さいが規格化された感度を考えると、感度の絶対値和で割られるので

$$|s_{i,k}| < |s_{j,k}| \tag{13}$$

となる。このように規格化された感度を用いると、最大偏差の生ずる周波数近傍だけを修正するのに有効な変数を選択することができる。

2.3 近似変数の選択

規格化された感度の大きなものから、指定された個数 (p 個) だけ近似で動かす変数として選択する。しかし、選ばれた変数のうち、その値が小さなものは量子化幅の変動で特性が大きくずれ、近似に有効でない場合がある。そこで、これらの変数は近似に使用する変数から除外する必要がある。

まず、最大偏差の生ずる周波数点 ω_k で、選択された変数 x_i を量子化幅だけ変動させた場合の感度を $t'_{i,k}$ とし、与えられた規格等から定められる感度の制限値を MS とする。

$$|t'_{i,k}| < MS \tag{14}$$

が成立する範囲で変数を選ぶ。最初に選択された p 個の変数の中に式(14)の条件を満足しないものがある場合、規格化された感度が次点のものを選び、式(14)の条件を調べる。この操作を繰り返すことにより p 個の変数を選ぶ。

次に、 p 個の変数がある離散値 (初回は初期値) およびその上下に量子化幅の q 倍変動させ、全組合せについて偏差 $D(\omega, x)$ を求める。ここで、全組合せについて偏差を算出する過程を1回の繰返しと呼ぶ。 p および q で指定された全組合せについて順次偏差を算出してゆく際、偏差が減少したらその値を一時的な最小偏差とみなし、その値とその偏差を与える周波数点、および全変数値を記憶しておく。従って、全組合せについて計算を終了した時点での偏差がその繰返し回数における最小偏差となる。なお、実用的見地からこの一連の操作中あらかじめ与えられた規格内に偏差が入れば演算は打ち切るものとする。

2.4 初期値決定法

SCF の特性を決定するのはキャパシタの容量比である。オペアンプを積分器として使うタイプの SCF では、積分キャパシタとオペアンプへの入力キャパシタで1つのキャパシタグループが構成される。通常、量子化前のキャパシタを最小容量が1となるよう規格化すると、他のキャパシタの容量は整数にはならない。従って、任意の正数 R を1つのキャパシタグループに含まれる全ての容量に掛け、丸め誤差を最小化する必要がある。

量子化前の積分キャパシタを CA 、入力キャパシタを C_1, C_2, \dots, C_{NC} とし、容量比を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{NC}$ とすると、

$$\alpha_i = C_i / CA \tag{15}$$

となる。次に、量子化後の積分キャパシタを CA' 、入力キャパシタを $C'_1, C'_2, \dots, C'_{NC}$ とし、容量比を $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{NC}$ とすると

$$CA' = \text{RND}[R \cdot CA] \tag{16}$$

$$C'_i = \text{RND}[R \cdot C_i] \tag{17}$$

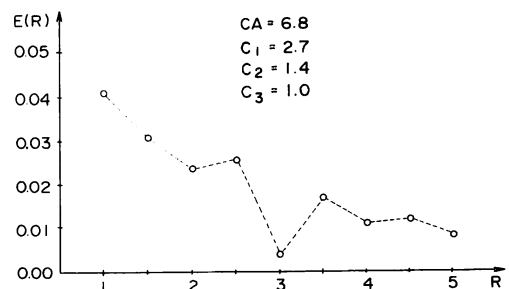


図3 容量比の二乗平均誤差と R との関係
Fig.3-Relation between mean square error of capacitance ratio and R .

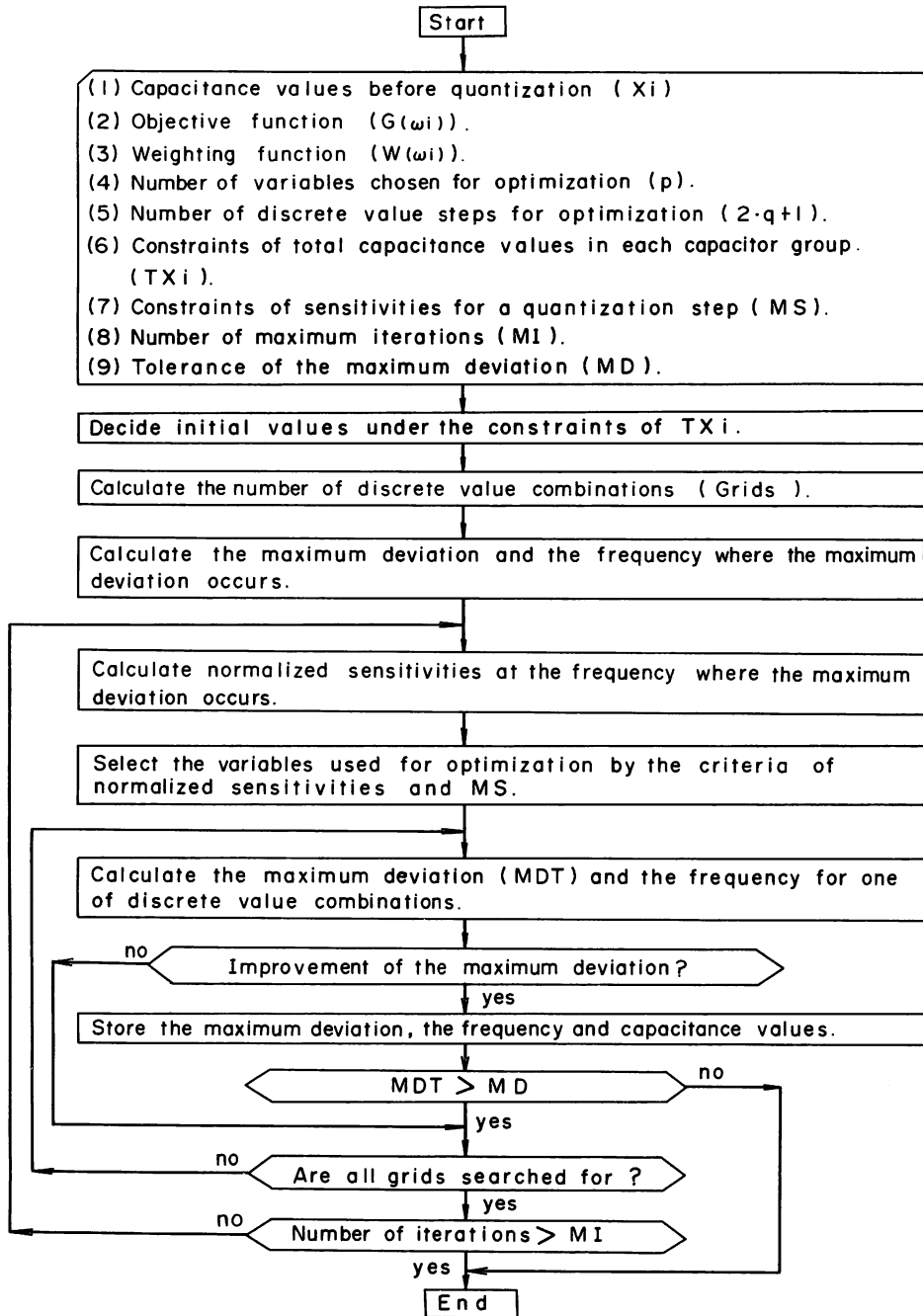


図4 離散近似アルゴリズムのフローチャート
Fig.4-Flowchart of discrete optimization algorithm.

$$\alpha_i' = C_i' / CA' \quad (18)$$

となる。但し、RNDは[]内の値を丸める関数とする。また、最適なRを選び出す尺度としては式(19)で示す容量比の二乗平均誤差E(R)を用いる。

$$E(R) = \sqrt{\frac{NC \sum_{i=1}^{NC} (\alpha_i - \alpha_i')^2}{NC}} \quad (19)$$

このキャパシタグループに与えられた容量和の上限をTXとすると

$$CA' + \sum_{i=1}^{NC} C_i' \leq TX \quad (20)$$

なる条件のもとで、E(R)が最小となるRを求め、丸め誤差の最小化を図る。ここでは、容量比の誤差だけでRの値を選択しているが、離散近似の初期値としては十分であると思われる。

次に、例題を用いて本方法を説明する。オペアンプへの入力キャパシタ数(NC)が3個の場合について、容量をそれぞれCA=6.8, C₁=2.7, C₂=1.4, C₃=1.0とする。任意の正数Rを1.0から5.0まで0.5きざみで変動させ、各容量を丸める。E(R)の減少過程を図3に示す。

図3からわかるように、Rの増大に伴いE(R)は漸減状態にあるが、その中間に極小値が生じる。従って、容量の総和から制限される範囲内で、E(R)に最小値を与えるRを求めることにより、初期値を決定する。

2.5 フローチャート

図4に本アルゴリズムを計算機で実行させるためのフローチャートを示す。

3. 例題

3.1 8次帯域通過フィルタ

高次関数を2次基本区間(バイカッド)の縦続接続で構成したSCFについて本方法を適用する。バイカッドの回路を図5に示す。なお、本回路は互いに重なり合わない2相のクロックで駆動されている。

まず、一例として、サンプリング周波数で規格化された通過域端周波数が、それぞれ、f_{-p} = 0.0268, f_{+p} = 0.0293, および阻止域端周波数が、f_{-s} = 0.0244, f_{+s} = 0.0316で、最小減衰量A_sが52dBの8次帯域通過フィルタについて離散近似を行なう。

次に、近似で変動させる変数(p), および、ある離散値の上下に量子化幅の整数倍だけ変動させるステップ数(q)が近似の収束過程にどのような影響を及ぼすか、上記例題を用いて検討する。

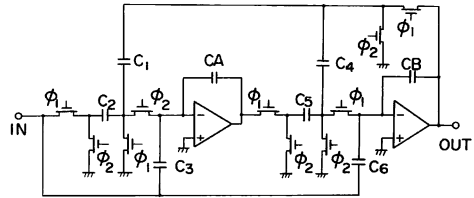


図5 バイカッドの回路
Fig.5-Circuit configuration of biquad.

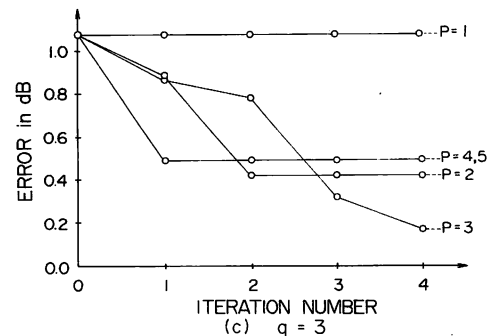
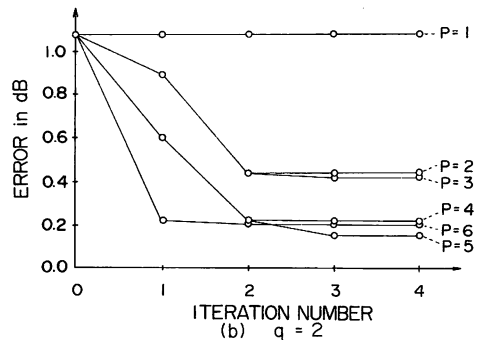
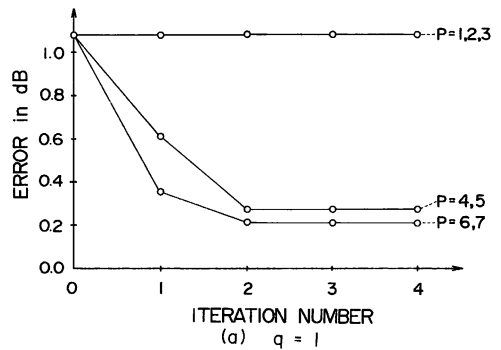


図6 8次帯域通過フィルタにおける収束過程
Fig.6-Convergence process on 8th order BPF.

図6(a)には $q=1$, 図6(b)には $q=2$, 図6(c)には $q=3$ の場合について, p をパラメータとして偏差の減少過程を, 横軸に収束までの繰返し回数をとって示す。

次に, $p=5, q=2$ の場合について, 近似前後の減衰特性を図7に, 容量を表1に示す。

3.2 5次低域通過フィルタ

リーブフロッグ形で構成されたSCFに本方法を適用する。5次低域通過フィルタの回路を図8に示す。

まず, サンプリング周波数で規格化された通過域端周波数が $f_{+p} = 0.0113$, および阻止域端周波数が $f_{+s} = 0.0247$ で最小減衰量 A_p が 64 dB の5次低域通過フィルタについて離散近似を行う。

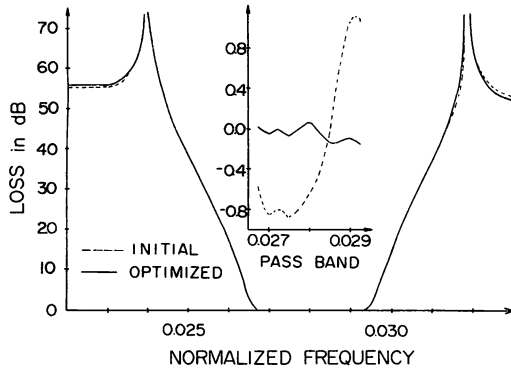


図7 8次帯域通過フィルタ近似前後の減衰特性
Fig.7-Attenuation characteristics before and after discrete optimization.

表1 8次帯域通過フィルタ近似前後の容量

区間	容量	近似前	近似後	区間	容量	近似前	近似後
1	CA	252	252	3	CA	189	190
	C ₁	43	43		C ₁	33	35
	C ₂	—	—		C ₂	7	7
	C ₃	14	14		C ₃	—	—
	CB	413	413		CB	280	279
	C ₄	4	4		C ₄	1	1
2	C ₅	72	72	4	C ₅	45	45
	C ₆	2	2		C ₆	73	73
	CA	72	74		CA	57	53
	C ₁	14	14		C ₁	10	10
	C ₂	5	5		C ₂	—	—
	C ₃	—	—		C ₃	8	8
2	CB	267	266	4	CB	306	308
	C ₄	1	1		C ₄	3	3
	C ₅	47	48		C ₅	56	53
	C ₆	81	81		C ₆	4	4

3.1と同様, 図9(a)には $q=1$, 図9(b)には $q=2$, 図9(c)には $q=3$ の場合について偏差の減少過程を示す。

次に, $p=4, q=2$ の場合について, 近似前後の減衰特性を図10に, 容量を表2に示す。但し, 図8

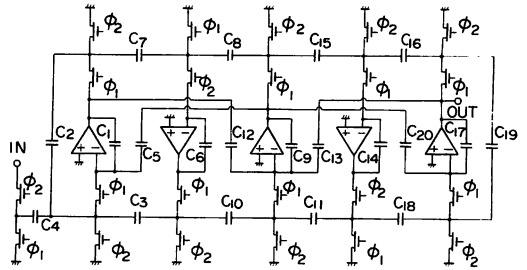


図8 リーブフロッグ形低域通過フィルタの回路
Fig.8-Circuit configuration of leapfrog LPF.

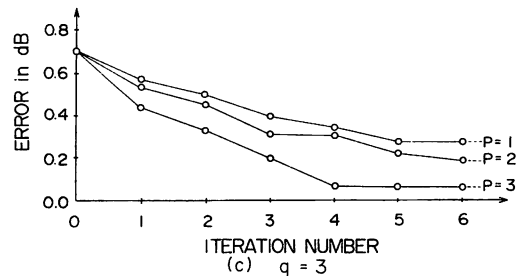
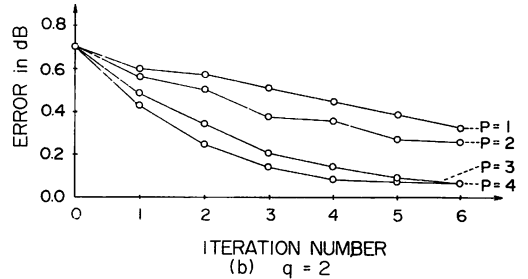
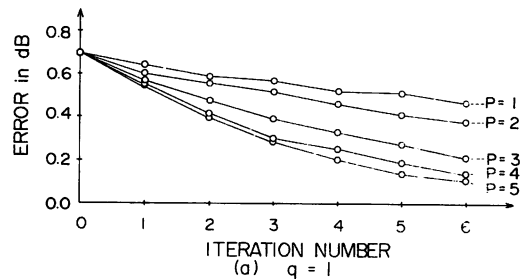


図9 5次低域通過フィルタにおける収束過程
Fig.9-Convergence process on 5th order LPF.

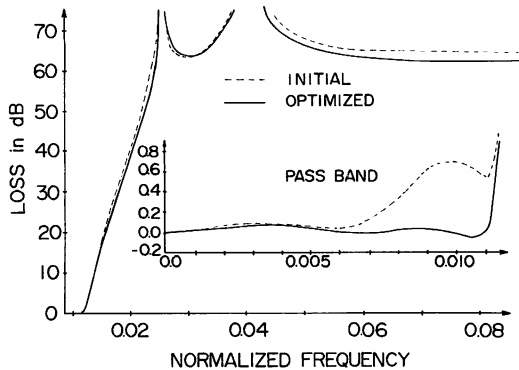


図10 5次低域通過フィルタ近似前後の減衰特性
Fig.10-Attenuation characteristics before and after discrete optimization.

表2 5次低域通過フィルタ近似前後の容量

容量	近似前	近似後	容量	近似前	近似後
C_1	65	54	C_{11}	4	4
C_2	3	3	C_{12}	6	6
C_3	4	4	C_{13}	3	3
C_4	4	4	C_{14}	103	105
C_5	7	7	C_{15}	5	5
C_6	80	76	C_{16}	3	3
C_7	3	3	C_{17}	29	26
C_8	4	4	C_{18}	4	4
C_9	93	100	C_{19}	2	2
C_{10}	4	4	C_{20}	3	3

の C_4 でフィルタの直流レベルは任意に変えられるので、図10では直流での偏差が零となるよう補正している。

3.3 p, q についての考察

3.1 で示すバイカッド形8次帯域通過フィルタの例題では、4~5回の繰返しで収束している。しかし、 p および q の値が小さいと、収束後の偏差が初期偏差に比べて十分圧縮されないことがある。 $q=1$ の場合には p を増加させても収束後の近似偏差は $q=2$ の場合に比べて大きい。これは変数を変動させるステップ数が少ないため圧縮率が上がらないものと思われる。一方、 $q=3$ の場合には変数を変動させるステップ数が多く、1回目の繰返しで偏差が局所的最小に落ち込み、それ以後の繰返しで偏差が改善されないことがある。また、 $q=3$ で p を増大させると探索領域が広がり演算回数が増大する。これらのことから p, q の値としては収束後の偏差が比較的良く圧縮され、かつ、演算回数が増加しない $p=5, q=2$ 程度が実用的に有効であると考えられる。図7に $p=5, q=2$ の場合の減衰特

性を示しているが、通過域で生じている1.1 dBの偏差は0.12 dBに圧縮されている。

3.2 で示すリーブフロッグ形5次低域通過フィルタの例題では、 p, q が増大するにつれ偏差は減少し、局所的最小に落ち込むことはない。また、 q が1から3へと増大するにつれ、収束するまでの繰返し回数は少なくなり、偏差も減少している。従って、収束後の偏差と演算回数を考慮に入れ、 p, q を選択すると、 $p=4, q=2$ 程度が妥当と考えられる。図10に $p=4, q=2$ の場合の減衰特性を示しているが、通過域で生じている0.7 dBの偏差は0.065 dBに圧縮されている。

4. むすび

本論文ではSCFにおける離散近似の一方法を提案している。

まず、離散近似に有効な変数を選択するために、ある周波数点におけるフィルタ特性の感度を近似領域の全周波数点における感度の絶対値で割った“規格化された感度”という尺度を導入し、その尺度と量子化幅だけ変動させた場合の感度を用い近似変数を選択する。ついで、その選択された変数について、指定された範囲内の総グリッド上で最小偏差を与える変数値を探索する。また、離散近似に用いる初期値は、SCFを構成する各オペアンプを中心とした各キャパシタグループにおいて、容量和の上限を与え、その範囲内で容量比の二乗平均誤差を最小化するという方法によって決定している。

最後に、例題として、バイカッドの縦続構成による8次帯域通過フィルタ、およびリーブフロッグ構成の5次低域通過フィルタについて本方法を適用している。両者とも、変数値を動かす幅は量子化幅の4倍、すなわち、 $q=2$ 、近似に用いる変数の個数 (p) は、バイカッド形で5程度、リーブフロッグ形で4程度が演算回数を考慮した場合適当であると思われる。また、両者とも初期偏差は収束後約1/10に圧縮されている。

謝辞 日頃御指導頂く日本電気株式会社、伝送通信事業部デバイス部、日比野課長および信号処理グループの方々に深謝致します。

文 献

- (1) Hosticka, B. J., Brodersen, B.W. and Gray, P. R. : "MOS sampled data recursive filters using switched capacitor integrators", IEEE J. Solid-State Circuits, SC-12, pp.600-608 (Dec. 1977).

- (2) Iwata, K., Uchimura, K., Hattori, S., Shimizu, H. and Ogasawara, K. : "Low power PCM CODEC and filter system", IEEE J. Solid-State Circuits, **SC-16**, pp.73-79 (April 1981).
- (3) Gray, P. R., Senderowicz, D., Ohara, H. and Warren, B. M. : "A single-chip NMOS dual channel filter for PCM telephony applications", IEEE J. Solid-State Circuits, **SC-14**, pp.981-991 (Dec. 1979).
- (4) Avenhaus, E. : "On the design of digital filters with coefficients of limited word length", IEEE Trans. Audio Electroacoust., **AU-20**, pp.206-212 (Aug. 1972).
- (5) Steiglitz, K. : "Designing short-word recursive digital filters", Proc. 9th Annu. Allerton Conf. Circuit and System Theory, pp.778-788 (Oct. 1971).
- (6) Kwan, H. K. : "On the problem of designing IIR digital filters with short coefficient word length", IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Process., **ASSP-27**, pp.620-624 (Dec. 1979).
- (7) Suk, M. and Mitra, S. K. : "Computer-aided design of digital filters with finite word lengths", IEEE Trans. Audio Electroacoust., **AU-20**, pp.356-363 (Dec. 1972).
- (8) 水上, 日比野, 中山 : "デジタルフィルタの係数最適化プログラムについて", 信学技報, **CST78-59** (1978-09).
- (9) Bandler, J. W. and Bardakjian, B. L. : "Design of recursive digital filters with optimized wordlength coefficients", Computer Aided Design, pp.151-156 (July 1975).
- (10) Brglez, F. : "Digital filter design with short word-length coefficients", IEEE Trans. Circuits & Syst., **CAS-25**, pp.1044-1050 (Dec. 1978).

(昭和58年10月13日受付, 59年1月10日再受付)