

零符号間干渉を実現する縦続分割形

ディジタルナイキストフィルタの一設計法

正員 中山 謙二[†]A Design Method for Cascade Form Digital Nyquist Filters
with Zero Intersymbol InterferenceKenji NAKAYAMA[†], Regular Member

あらまし データ伝送などにおいてはデータ信号の帯域制限を行うと同時に、その時間応答が1点を除く等間隔標本点において零交差する、すなわち零符号間干渉を実現するナイキスト波形成形フィルタが重要な役割を果たしている。本論文は標本化された信号を扱うディジタルナイキスト波形成形フィルタの設計法について論じるものであるが、特に送信フィルタと受信フィルタに同一の伝達関数を用いる場合に、全体として零符号間干渉を実現する一設計法を提案している。本設計法では、伝達関数の係数を近似変数として用い、これらを時間応答を近似する係数 x_t と周波数応答を近似する係数 x_f に分割する。零符号間干渉の条件は x_t に対する線形方程式の形で与えられる。すなわち、零符号間干渉を実現するための近似変数 x_t は線形方程式を解くことにより求められる。一方、周波数特性は x_f と近似関数の関係が非線形であることを考慮して、逐次近似法を用いて最適化される。本設計法はFIRフィルタと、さらに従来方法では不可能であったIIRフィルタの双方に適用可能である。本論文ではさらに、乗算器係数と内部信号における量子化誤差が符号間干渉に与える影響についても解析を行い、その推定式を求めている。

1. ま え が き

データ伝送などにおいては、データ信号の帯域制限を行うと同時に、その時間応答が1点を除く等間隔標本点において零交差する、すなわち零符号間干渉を実現するナイキスト波形成形フィルタ（以下は単にナイキストフィルタ（Nyquist filter）と呼ぶ）が重要な役割を果たしている^{(1),(2)}。一方、最近のディジタルデバイスの発達に伴い、ディジタルナイキストフィルタの実用化も活発に進められている^{(3)~(5)}。FIR(Finite impulse response)フィルタとIIR(Infinite impulse response)フィルタの双方において零符号間干渉を実現する設計法がいくつか提案されている^{(3),(6),(7)}。

一方、データ伝送システムにおいては、送信データの帯域制限のための送信フィルタと、回線雑音や復調によって生じる不要波成分を除去するために受信フィルタが用いられる。この場合のナイキストフィルタの設計法としては、送・受信フィルタのいずれかを固定

し、他方のみを用いて波形近似を行う方法と、送・受信フィルタの双方を用いて波形近似を行う方法とが考えられる。後者に対しては、送・受信フィルタの双方に同一の特性を有するフィルタを用いる方法が4800 bps モデムなどに対してCCITTから勧告されている⁽⁸⁾。本論文では、このような縦続分割形ナイキストフィルタを対象としてその設計法について論じるものである。

FIRフィルタを対象とし、零符号間干渉を実現する縦続分割形ナイキストフィルタの設計法については既にいくつかの方法が検討されている^{(9),(10)}。しかし、IIRフィルタについては未だ十分に検討が行われていない。そこで本論文では、FIRフィルタとIIRフィルタの双方に適用可能である設計法について検討を行い、零符号間干渉を実現する一設計法を提案するものである⁽¹¹⁾。

2. 縦続分割形ナイキストフィルタにおける
零符号間干渉条件の線形方程式による表現

2.1 FIRフィルタ

FIRフィルタの伝達関数は一般に次式で表わされる。

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h_n z^{-n}, \quad z = e^{j2\pi f/f_s} \quad (1)$$

[†] 日本電気株式会社伝送通信事業部, 川崎市

Transmission Division, NEC Corporation, Kawasaki-shi,
211 Japan

ここで、 f_s は標本化周波数である。以下の議論では5を除いて $f_s = 1\text{Hz}$ とする。 $H(z)$ の縦続形 $H^2(z)$ を

$$H^2(z) = \sum_{n=0}^{2N} h_n^* z^{-n} \quad (2)$$

とすると、 h_n^* は h_n の自己相関として表わされる。

$$h_n^* = \sum_{m=0}^n h_m h_{n-m} \quad (3)$$

時間応答が最大値を取る標本点を K とすると、 h_n^* における1点を除く等間隔零交差条件は次のようになる。

$$h_{K+iM}^* = 0, \quad i = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4a)$$

$$M = f_s / 2f_N \quad \text{: 整数} \quad (4b)$$

ここで、 f_N はナイキスト周波数である⁽¹⁾。本論文では M が整数の場合のみを対象とする。式(4)の条件は h_n に対して一般に連立2次方程式である。しかし、係数集合 $\{h_n\}$ のある部分集合に着目してこれを変数とし、残りの係数を定数と見なすことにより式(4)を線形方程式に帰着させることが可能である。この部分係数集合の存在性に対して次の補題1が成り立つ。

[補題1]

$$h_n^* \neq 0, \quad n \neq K + iM, \quad i = \pm 1, \pm 2 \quad (5)$$

式(5)の条件下で式(4)を線形方程式に帰着させる部分係数集合を x_i とする時、

$$(1) \quad ((K))_M = 0 \quad \text{または} \quad ((2N-K))_M = 0 \quad (6)$$

x_i は存在しない。

$$(2) \quad ((K))_M \neq 0 \quad \text{かつ} \quad ((2N-K))_M \neq 0 \quad (7)$$

$$(i) \quad M = 2 \quad x_i \text{ は存在しない。}$$

$$(ii) \quad M = 3$$

$$(1) \quad ((K))_M = 1 \quad \text{かつ} \quad ((2N-K))_M = 1 \quad (8)$$

$K = \text{偶数}$ x_i は存在する。

$K = \text{奇数}$ 任意の N に対して x_i は存在しない。

$$(ii) \quad ((K))_M \neq 1 \quad \text{または} \quad ((2N-K))_M \neq 1 \quad (9)$$

x_i は存在する。

$$(iii) \quad 4 \leq M \quad x_i \text{ は存在する。}$$

ここで、 $(())_M$ は M を法とする剰余演算である。補題1の略証を付録1に示す。

FIRフィルタにおける x_i の選択例を付録2に示す。

2.2 IIRフィルタ

$H(z)$ をIIRフィルタの伝達関数とする時、そのインパルス応答が1点を除く等間隔標本点で零交差するための必要十分条件は既に求められている⁽⁷⁾。従って、ここでは送・受信縦続形の伝達関数 $H^2(z)$ がこの条件を満足するように零符号間干渉条件の定式化を行う。文献(7)で与えられている必要十分条件を考慮して $H(z)$

を次のように直接形で表わす。

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N_n} a_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{N_d} b_n z^{-nM}} \quad (10)$$

さらに、 $H^2(z)$ を

$$H^2(z) = \frac{\sum_{n=0}^{2N_n} a_n^* z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{2N_d} b_n^* z^{-n}} \quad (11)$$

とすると、 a_n^* と b_n^* は各々次式で表わされる。

$$a_n^* = \sum_{m=0}^n a_m a_{n-m} \quad (12a)$$

$$b_n^* = \sum_{m=1}^{n-1} b_m b_{n-m}, \quad 1 \leq n \quad (12b)$$

伝達関数 $H^2(z)$ を有するフィルタのインパルス応答に対する零符号間干渉の条件は式(13)で与えられる。

$$a_{K-iM}^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (13a)$$

$$a_K^* \neq 0 \quad (13b)$$

$$a_{K+iM}^* = a_K^* b_i^*, \quad i = 1, 2, \dots \quad (13c)$$

式(12)より式(13)は a_n 、 b_n に対して一般に連立4次方程式となるが、FIRフィルタの場合と同様に線形方程式に帰着させるための部分係数集合 x_i を選択することが可能である。これについては次の補題2が成り立つ。

[補題2]

$$(1) \quad K + 2N_d M < 2N_n$$

$N = N_n$ 、 $h_n = a_n$ とした時、補題1が成り立つ。

$$(2) \quad K + 2N_d M \geq 2N_n$$

$N = N_n$ 、 $h_n = a_n$ とした時、補題1が成り立つ。

但し、補題1の(1)における $((2N-K))_M \neq 0$ 、(2)における $((2N-K))_M \neq 0$ 、 $((2N-K))_M = 1$ および $((2N-K))_M \neq 1$ の条件を削除することができる。

略証を付録3に示す。

3. 近似方法

3.1 アルゴリズム

前章で述べたように、時間応答に対する近似変数 x_i を適当に選ぶことにより時間応答の近似は線形方程式を解くことにより行われる。従って、周波数領域と時間領域の同時近似法としては文献(12)で提案した方法が基本的に適用可能である。以下に本論文で提案する近似アルゴリズムを要約する。

(1) 周波数応答と近似変数 x_i の関係は一般に非線形であるから、逐次チェビシェフ近似法⁽¹³⁾により周波

数特性の近似を行う。

(2) 時間応答の近似は上記の逐次近似の各ステップで得られる x_f を定数とする線形方程式を解いて x_i を求める。さらに、この時の x_f と x_i を用いて周波数応答を評価することにより、周波数応答の近似過程において零符号間干渉の条件は常に満足されることになる。

(2)の過程を式で表わすと次のようになる。まず、伝達関数 $H(z)$ は一般に係数 x_i と x_f を用いて

$$H(z, x_i, x_f) \tag{14}$$

と表わされる。さらに、 x_i を変数とする線形方程式を

$$A x_i = c \tag{15}$$

とすると、行列 A とベクトル c の要素は x_f の要素から構成されている。式(15)から

$$x_i = A^{-1} c \tag{16}$$

とすると、式(14)の伝達関数は式(17)の如く近似変数としては x_f のみを用いて表わされる。

$$H(z, A^{-1} c, x_f) \tag{17}$$

言い換えれば、式(17)の関数形を用いることにより零符号間干渉の条件は自動的に満足されることになる。

3.2 フローチャート

図1に近似アルゴリズムのフローチャートを示す。

(1) $H(z, x_i, x_f)$ に対する初期値の推定

小文では時間領域における理想応答に近似する方法を用いる。これは周波数領域においては振幅と位相を近似する必要があり、計算が複雑となるためである。

さて、遷移帯域を余弦関数を用いて補間した振幅特性を有し、位相特性が線形である伝達関数を $H_i(z)$ とする。すなわち、

$$|H_i(e^{j\omega})| = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_1 \tag{18a}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \pi \left(\frac{\omega - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \right) \right\}, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \tag{18b}$$

$$= 0, \quad \omega_2 \leq \omega \leq \pi \tag{18c}$$

さらに、ロールオフ率 ρ を次式で定義する。

$$\rho = (\omega_2 - \omega_1) / 4\pi f_N \tag{19}$$

$H_i(z)$ の平方 $\sqrt{H_i(z)}$ を伝達関数とするフィルタのインパルス応答を \hat{h}_n とした時、これが $H(z)$ を伝達関数とするフィルタのインパルス応答に対する1つの理想応答である。初期値の近似に対しては従来の時間域近似法が適用できる¹⁴⁾。

(2) 逐次チェビシェフ近似

周波数領域の近似問題は次のように定式化できる。

$$\left| \frac{H(e^{j\omega}, A^{-1} c, x_f)}{H(e^{j\omega_0}, A^{-1} c, x_f)} \right| < \delta, \quad \omega_2 \leq \omega \leq \pi \tag{20}$$

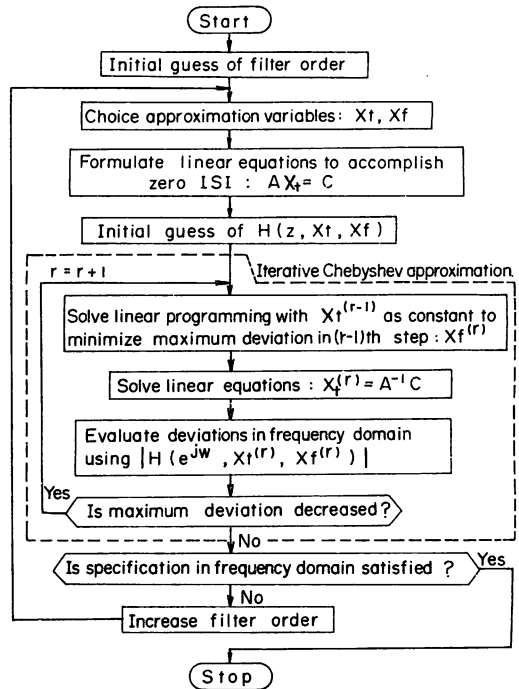


図1 近似フローチャート

Fig.1 - Approximation flow chart.

において、 $\delta \rightarrow$ 最小

第 $(r-1)$ ステップにおける最大偏差を最小化する $x_f^{(r)}$ を1次微分係数を用いた局所的な線形計画問題を解いて求める¹⁵⁾。この時、 x_i は第 $(r-1)$ ステップで求めた $x_i^{(r-1)}$ を用いて定数として扱われている。第 r ステップにおける周波数応答は $x_f^{(r)}$ と、 $x_f^{(r)}$ を係数とする線形方程式を解いて得られる $x_i^{(r)}$ を用いた伝達関数 $H(z, x_i^{(r)}, x_f^{(r)})$ により評価される。

伝達関数の分母係数は x_f に含まれるから、逐次近似における分母関数の表現は任意である。そこで分母関数を1次または2次因数の積として表わすことにより、常に安定性を評価しながら逐次近似を行うことが可能である。

4. 量子化誤差による符号間干渉の解析

デジタルフィルタの実際の動作においては係数や内部演算において量子化誤差が発生する。これらの量子化誤差により生じる符号間干渉を推定する式を求める。 $H(z)$ の回路構成としては直接形を取り上げる。

4.1 係数の量子化誤差による符号間干渉

$H^2(z)$ を $G(z)$ とし、

$$G(z) = H^2(z) \tag{21}$$

$H(z)$ を

$$H(z) = P(z)/Q(z) \quad (22)$$

と表わす。ここで $P(z)$ と $Q(z)$ は z^{-1} の高次多項式である。係数の量子化により $G(z)$, $P(z)$ および $Q(z)$ において誤差 $\Delta G(z)$, $\Delta P(z)$ および $\Delta Q(z)$ が各々発生したとする。

$$G(z) + \Delta G(z) = \left(\frac{P(z) + \Delta P(z)}{Q(z) + \Delta Q(z)} \right)^2 \quad (23)$$

係数の量子化誤差が充分小さい範囲では、式(23)の $\Delta G(z)$ は次の一次近似式で表わされる。

$$\Delta G(z) \approx \frac{2}{Q(z)} (H(z) \Delta P(z) - G(z) \Delta Q(z)) \quad (24)$$

ここで、係数の量子化誤差による符号間干渉を次のように定義する。

$$ISI(Q^c) \triangleq \left\{ \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \Delta g_{i+nM}^2 \right\}^{1/2} / g_K \quad (25a)$$

$$i + n_0 M = K, \quad 0 \leq i \leq M-1 \quad (25b)$$

g_n , Δg_n は $G(z)$, $\Delta G(z)$ を伝達関数とするフィルタのインパルス応答である。次に、 $\Delta G(z)$ を次のように低い標準化周波数を有する関数の並列構成に分解する。

$$\Delta G(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} \Delta G_i(z^M) \quad (26)$$

式(24)において、 $\Delta P(z)$ と $\Delta Q(z)$ の係数分布は一般に無相関と見なせるから、これらの振幅特性は平坦となる⁹⁾。従って、 $\Delta G(z)$ の振幅特性は $H(z)/Q(z)$ と $G(z)/Q(z)$ で決まる。これらはナイキストフィルタの帯域制限条件から

$$\pi/M \leq \omega \leq \pi \quad (27)$$

においてほぼ零である。この $\Delta G(z)$ の帯域制限特性を考慮すると次の関係が成り立つ⁹⁾。

$$|\Delta G_i(e^{jM\omega})| = \frac{1}{M} |\Delta G(e^{j\omega})|, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{M} \quad (28)$$

一方、 $\Delta G_i(z^M)$ とこれを伝達関数とするフィルタのインパルス応答 Δg_{i+nM} の間にはパースバルの関係が成り立つから¹⁰⁾、これらより

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_{i+nM}^2 = \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{M^2} |\Delta G(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (29)$$

なる関係を得る。式(25), (29)より $ISI(Q^c)$ は

$$ISI(Q^c) = \left\{ \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta G(e^{j\omega})|^2 d\omega \right\}^{1/2} / g_K \quad (30)$$

となる。 $\Delta P(z)$ と $\Delta Q(z)$ の係数分布は互いに無相関と見なせるから $|\Delta G(e^{j\omega})|^2$ は次式で評価できる。

$$|\Delta G(e^{j\omega})|^2$$

$$\approx \frac{\Delta_c^2}{3} \left\{ (N_n + 1) \left| \frac{H(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} \right|^2 + N_d \left| \frac{G(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} \right|^2 \right\} \quad (31)$$

ここで $\Delta_c = 2^{-t_c}$, t_c は係数の小数点以下のビット数である。式(30), (31)より

$$ISI(Q^c) \approx \left\{ M \frac{\Delta_c^2}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[(N_n + 1) \left| \frac{H(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} \right|^2 + N_d \left| \frac{G(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} \right|^2 \right] d\omega \right\}^{1/2} \quad (32)$$

ここでは次の関係を用いている。

$$g_K \approx 1/M \quad (33)$$

式(32)において $H(z)$ と $G(z)$ の振幅特性はロールオフ率のみで決まる形状であり、与えられたロールオフ率に対しては固定して考えることができる。従って、 $ISI(Q^c)$ を決めるパラメータは伝達関数の次数 N_n , N_d と分母関数 $Q(z)$ となる。

FIRフィルタの場合には式(32)において、 $Q(z) = 1$, $N_d = 0$ とすればよい。さらに、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \approx \frac{1}{M} \quad (34)$$

を考慮すれば

$$ISI(Q^c) \approx \sqrt{\frac{N_n + 1}{3}} \cdot \Delta_c \quad (35)$$

と簡単な推定式を得ることができる。

4.2 内部信号の量子化誤差による符号間干渉

内部信号における量子化誤差、すなわち乗算後に発生する丸め誤差によって生じる符号間干渉 $ISI(Q^d)$ は $ISI(Q^c)$ の場合と同様にして次式で与えられる。

$$ISI(Q^d) \approx \left\{ M \frac{\Delta_d^2}{12} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S^{-2} N_d |G(e^{j\omega})|^2 + (N_n + 1 + S^{-2} N_d) |H(e^{j\omega})|^2 + (N_n + 1)] d\omega \right\}^{1/2} \quad (36)$$

さらに、スケールングファクタ S は次式で与えられる。

$$S = \min \{ |Q(e^{j\omega})| \} \quad (37)$$

5. 設計例

〔設計例1〕

回路形式 FIRフィルタ

標準化周波数 (f_s) 4 Hz

ナイキスト周波数 (f_N) 0.5 Hz, $M = f_s / 2 f_N = 4$

ロールオフ率 (ρ) 50%

次数 (N_n) 23次

補題1を考慮して波形中心 K を21とする。さらに

式(5)の条件下で零符号間干渉の条件を線形方程式に帰着させる近似変数 x_t と残りの係数から成る近似変数 x_f を次のように選択する。

$$x_t = (h_1, h_2, h_6, h_9, h_{10}, h_{13}, h_{14}, h_{17}, h_{18}, h_{21})$$

$$x_f = (h_0, h_3, h_4, h_5, h_7, h_8, h_{11}, h_{12}, h_{15}, h_{16}, h_{19}, h_{20}, h_{22}, h_{23})$$

図2(a)に $H(z)$ の周波数特性、図2(b)にインパルス応答 h_n 、さらに図3に $H^2(z)$ に対応するインパルス応答 h_n^* を各々示す。

図3より、インパルス応答 h_n^* において零符号間干渉が実現されていることが分る。図2(a)の通過域振幅特性と群遅延特性 (G. Delay) は時間域近似の結果として得られたものであるが、理想応答に近いものとなっている。図4に係数語長と ISI (Q°) の関係を示す。ここで有効語長 (Effective word lengths)

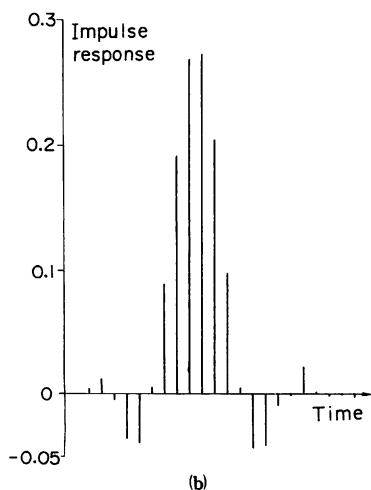
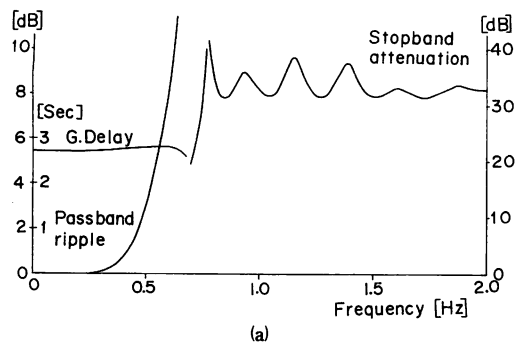


図2 (a) $H(z)$ の周波数応答
(b) インパルス応答: h_n
Fig.2-(a) $H(z)$ Frequency responses for $H(z)$.
(b) Impulse response: h_n .

とは係数の最大値を1に規格化した時の小数点以下のビット数を表わしている。破線は式(35)で与えた推定式から求めたものであり、○印の値は実際のシミュレーションから求めたものである。この結果から式(35)の推定式が有効であることが分る。

[設計例2]

回路形式 IIRフィルタ

$$H(z) = \sum_{n=0}^{15} a_n z^{-n} / (1 + b_1 z^{-4}) \quad (38)$$

他の条件は設計例1と同じである。近似変数 x_t 、 x_f を次のように選択する。

$$x_t = (a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{13})$$

$$x_f = (a_0, a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{14}, a_{15}, b_1)$$

設計結果を図5~図7に示す。

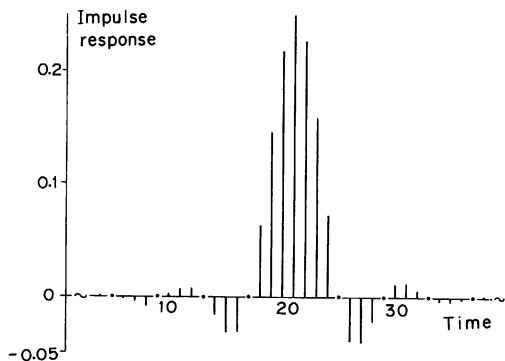


図3 インパルス応答: h_n^*
Fig.3-Impulse response: h_n^* .

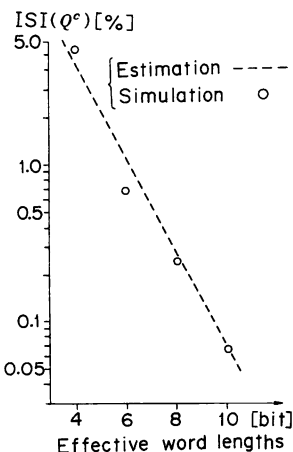
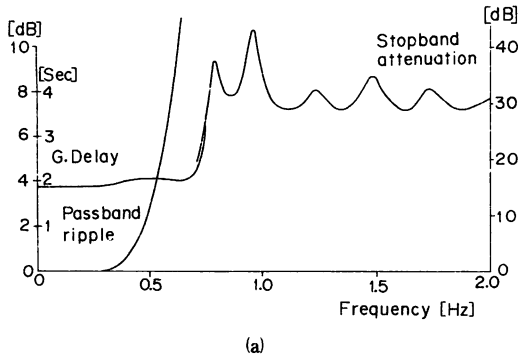
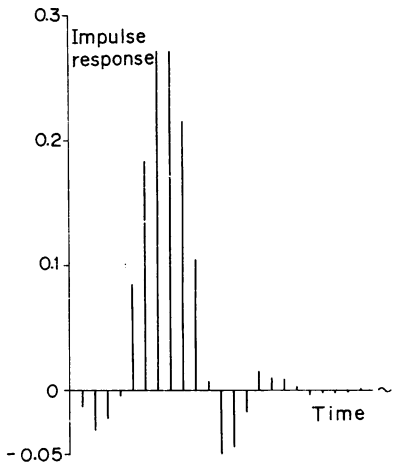


図4 ISI (Q°) の推定値とシミュレーション結果
Fig.4-Estimation and simulation for ISI (Q°).



(a)



(b)

図5 (a) $H(z)$ の周波数特性
(b)インパルス応答： h_n
Fig.5-(a) Frequency responses for $H(z)$.
(b) Impulse response : h_n .

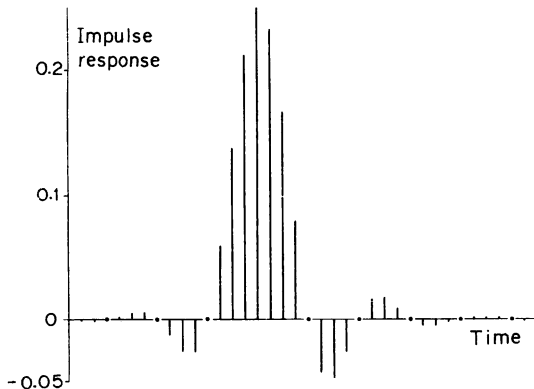


図6 インパルス応答： h_n^*
Fig.6 - Impulse response : h_n^* .

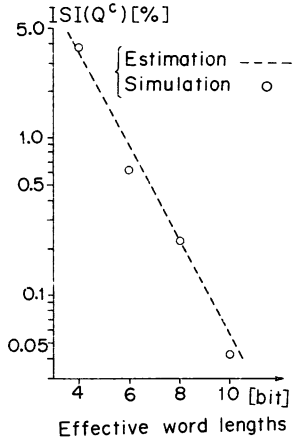


図7 $ISI(Q^c)$ の推定値とシミュレーション結果
Fig.7 - Estimation and simulation for $ISI(Q^c)$.

図6のインパルス応答 h_n^* は少し左右非対称になっているが零符号間干渉の条件は満している。図2(a)と図5(a)の阻止域減衰量はほぼ同程度であり、IIRフィルタの方がFIRフィルタに比べて低次の伝達関数を用いて所望の周波数応答が実現できることが分かる。

6. むすび

本論文では、縦続分割形ナイキストフィルタ、特に送信側と受信側で同一の伝達関数を用いる場合について零符号間干渉を実現する設計法を提案した。本設計法はFIRフィルタとIIRフィルタの双方に適用可能である。

文 献

- (1) Lucky, R.W., Salz, J. and Weldon Jr., E.J.: "Principles of Data Communication", McGraw-Hill, Inc. (1968).
- (2) 吉田, 石崎: "与えられた阻止域最小実効減衰量を有する伝達関数とその時間応答近似", 信学論(A), 58-A, 8, pp.466-473(昭46-08).
- (3) Mueller, K.H.: "A new approach to optimum pulse shaping in sampled systems using time-domain filtering", Bell Syst. Tech. J., 52, pp.723-729 (May-June 1973).
- (4) Burlarge, D.W., et al.: "Time-domain design of frequency-sampling digital filters for pulse shaping using linear programming techniques", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, ASSP-22, pp.180-185 (June 1974).
- (5) 日比野雅夫: "阻止域で指定減衰量の等リップル特性を有するIIR低域フィルタとその時間応答近似", 信学論(A), J62-A, 12, pp.895-902(昭54-12).
- (6) 鎌田, 三谷, 辻井: "符号間干渉零・阻止域減衰量規定非巡回形デジタルフィルタの一設定法", 信

学論(A), 57-A, 5, pp.168-169(昭49-05).

(7) Nakayama, K. and Mizukami, T.: "A new IIR Nyquist filter with zero intersymbol interference and its frequency response approximation", IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-28, pp.23-34 (Jan. 1982).

(8) CCITT, Volume VIII. 1-Rec., V.27 bits, Geneva (1976).

(9) Halpern, P.H.: "Optimum finite duration Nyquist signals", IEEE Trans. Commun., COM-27, pp.884-888 (June 1979).

(10) Chevillat, P.R. and Ungerboeck, G.: "Optimum FIR transmitter and receiver filters for data transmission over band-limited channels", IEEE Trans. Commun., COM-30, pp.1909-1915 (Aug. 1982).

(11) 中山謙二: "縦統分割形ナイキストフィルタの一設計法", 信学技報, CAS81-2 (1981-05).

(12) Nakayama, K.: "A simultaneous frequency and time domain approximation method for discrete-time filters", Proc. IEEE ISCAS'82, pp.354-357 (May 1982).

(13) Ishizaki, Y. and Watanabe, H.: "An iterative Chebyshev approximation method for network design", IEEE Trans. Circuit Theory, CT-15, pp.326-336 (Dec. 1968).

(14) Brophy, F. and Salazar, A.C.: "Considerations of the Padé approximant technique in the synthesis of recursive digital filters", IEEE Trans. Audio Electroacoust., AU-21, pp.500-505 (Dec. 1973).

(15) Chan, D.S.K. and Rabiner, L.R.: "Analysis of quantization errors in the direct form for finite impulse response digital filters", IEEE Trans. Audio Electroacoust., AU-21, pp.354-366 (Aug. 1973).

(16) Bellanger, M. and Daguët, J.L.: "TDM-FDM transmultiplexer: Digital polyphase and FFT", IEEE Trans. Commun., COM-22, pp.1199-1205 (Sept. 1974).

(17) Rabiner, L.R. and Gold, B.: "Theory and Application of Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Inc., New Jersey (1975).

付 録

1. 補題1の証明

(1) 式(6)より

$$h_0 = 0 \quad \text{または} \quad h_N = 0 \quad (\text{A}\cdot 1)$$

となる。これより

$$h_1^* = 0 \quad \text{または} \quad h_{N-1}^* = 0 \quad (\text{A}\cdot 2)$$

となり、式(5)の条件を満たさない。

(2)-(i) 式(7)より $M = 2$ に対しては

$$((K))_M = 1 \quad \text{かつ} \quad ((2N-K))_M = 1 \quad (\text{A}\cdot 3)$$

が成り立つ。さらに式(4)と

$$h_0^* \neq 0 \quad \text{かつ} \quad h_{2N}^* \neq 0 \quad (\text{A}\cdot 4)$$

を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} h_n = 0, \quad n = K - iM, \quad i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{K}{M} \right\rfloor \\ = N + 1 - iM, \quad i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{2N-K}{M} \right\rfloor \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 5)$$

となる。ここで、 R を実数とする時、 $[R]$ は R を越えない最大整数である。一方、 h_K^* は次式で表わされる。

$$h_K^* = \sum_{n=0}^K h_n h_{K-n} \quad (\text{A}\cdot 6)$$

式(A・5)より奇数の N に対して

$$K = N \quad (\text{A}\cdot 7)$$

の時のみ

$$h_K^* = h_0 h_N \neq 0 \quad (\text{A}\cdot 8)$$

となる。しかしこの時式(A・5)より

$$h_{K\pm 1}^* = 0 \quad (\text{A}\cdot 9)$$

となり、式(5)の条件を満たさない。その他の K と偶数の N に対しては式(A・5)より h_K^* は零となりやはり式(5)の条件を満たさない。以上により、 $M = 2$ に対して x_2 は存在しない。

(2)-(ii)

ここで4種類の部分係数集合を定義する。

$\{h_n\}_1$: $((K))_M = 1, ((2N-K))_M = 1$ の時に一意的に零に固定される h_1, h_{N-1} から成る。

$\{h_n\}_2$: $h_{K+iM}^* (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ の表現において互に積の関係にない h_n から成る。但し

$\{h_n\}_1$ は除く。

$\{h_n\}_3$: $K = \text{偶数}$ の時、 $h_K^* \neq 0$ より得られる $h_{K/2}$ より成る。

$\{\tilde{h}_n\}$: $\{h_n\}_1, \{h_n\}_2$ および $\{h_n\}_3$ の和集合。

(i) 各部分集合を次のように設定できる。

$$\left. \begin{aligned} \{h_n\}_1 &= (h_1, h_{N-1}) \\ \{h_n\}_2 &= (h_0, h_3, \dots, h_{\left(\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor - 1\right)3}) \\ \{h_n\}_3 &= (h_{K/2}), \quad K = \text{偶数} \\ &= \text{空集合}, \quad K = \text{奇数} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 10)$$

式(A・10)における $\{h_n\}_2$ は唯一の部分集合ではないが、 $\{h_n\}_2$ における要素の数の最大は $[N/3]$ である。 $\{\tilde{h}_n\}$ の要素の数を $\mathcal{N}\{\tilde{h}_n\}$ とすると、式(A・10)から

$$\mathcal{N}\{\tilde{h}_n\} = \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor + 3, \quad K = \text{偶数}$$

$$= \left[\frac{N}{3} \right] + 2, \quad K = \text{奇数} \quad \left. \vphantom{\left[\frac{N}{3} \right]} \right\} \text{(A}\cdot\text{11)}$$

で与えられる。一方、式(4a)の方程式の数は

$$\mathcal{N}(EQ) = \frac{2N-2}{3} \quad \text{(A}\cdot\text{12)}$$

であるから、 $\{\tilde{h}_n\}$ の要素を x_i に選択できるための十分条件は

$$\mathcal{N}(\{\tilde{h}_n\}) \geq \mathcal{N}(EQ) \quad \text{(A}\cdot\text{13)}$$

となる。式(8)を満たす N に対しては $K = \text{偶数}$ の時に式(A・13)の等号が成り立つが、 $K = \text{奇数}$ の時には式(A・13)が成立しない N が存在する(例： $M = 3, K = 7, N = 7$)。

(ii) 奇数の K に対して各部分集合を次のように設定できる。まず、式(9)の条件を式(A・14)と(A・15)に分ける。

$$((K))_M = 1 \quad \text{または} \quad ((2N-K))_M = 1 \quad \text{(A}\cdot\text{14)}$$

$$((K))_M \neq 1 \quad \text{かつ} \quad ((2N-K))_M \neq 1 \quad \text{(A}\cdot\text{15)}$$

各部分集合は

$$\left. \begin{aligned} \{h_n\}_1 &= (h_1 \text{ または } h_{N-1}), \text{ 空集合} \\ \{h_n\}_2 &= (h_0, h_3, \dots, h_{\left[\frac{N}{3} \right]}) \\ \{h_n\}_3 &= \text{空集合} \end{aligned} \right\} \text{(A}\cdot\text{16)}$$

となる。式(A・16)における $\{h_n\}_1$ の第1, 第2項は各々式(A・14)と(A・15)に対応している。この時、 $\{\tilde{h}_n\}$ の要素の数および式(4a)の方程式の数は各々、

$$\mathcal{N}(\{\tilde{h}_n\}) = \left[\frac{N}{3} \right] + 2, \quad \left[\frac{N}{3} \right] + 1 \quad \text{(A}\cdot\text{17)}$$

$$\mathcal{N}(EQ) = \frac{2N-3}{3}, \quad \frac{2N-4}{3} \quad \text{(A}\cdot\text{18)}$$

となる。式(9)を満たす N に対しては式(A・13)が成り立つ。 K が偶数の時は $h_{K/2}$ を $\{\tilde{h}_n\}$ の要素に追加できるため同様に式(A・13)の条件を満たすことができる。

(2)-(iii)

各部分集合を次のように設定できる。

$$\left. \begin{aligned} \{h_n\}_1 &= (h_1, h_{N-1}) \\ &\quad \text{但し, } ((K))_M = 1, ((2N-K))_M = 1 \\ \{h_n\}_2 &= (h_0, h_M, \dots, h_{\left[\frac{N}{M} \right]M}) \\ \{h_n\}_3 &= (h_{K/2}), K: \text{偶数, } = \text{空集合, } K: \text{奇数} \end{aligned} \right\} \text{(A}\cdot\text{19)}$$

$\{\tilde{h}_n\}$ の要素の数と式(4a)の方程式の数の一般式は

N, M および K の各組合せに対して与えられる。その全てをここでは述べないが、いずれの場合においても式(A・13)の条件を満たしていることが容易に示される。

(証明終)

2. FIRフィルタにおける x_i の選択例

$N = 11, M = 4, K = 9$ の例を示す。式(4), (5)に対応する条件は各々式(A・20), (A・21)で与えられる。

$$h_1^* = 2h_0h_1 = 0 \quad \text{(A}\cdot\text{20a)}$$

$$h_5^* = 2(h_0h_5 + h_1h_4 + h_2h_3) = 0 \quad \text{(A}\cdot\text{20b)}$$

$$h_{13}^* = 2(h_2h_{11} + h_3h_{10} + h_4h_9 + h_5h_8 + h_6h_7) = 0 \quad \text{(A}\cdot\text{20c)}$$

$$h_{17}^* = 2(h_6h_{11} + h_7h_{10} + h_8h_9) = 0 \quad \text{(A}\cdot\text{20d)}$$

$$h_{21}^* = 2h_{10}h_{11} = 0 \quad \text{(A}\cdot\text{20e)}$$

$$h_j^* \neq 0, \quad 0 \leq j \leq 22 \text{ かつ } j \neq 9 \pm 4, \pm 8, +12 \quad \text{(A}\cdot\text{21)}$$

式(A・20a), (A・20e)および(A・21)より $h_1 = h_{10} = 0$ となり、これらが $\{h_n\}_1$ の要素となる。 $\{h_n\}_2$ は式(A・20)と h_9^* の表現において互いに積の関係にならない係数から成る。例えば

$$\{h_n\}_2 = (h_0, h_3, h_7, h_{11}), (h_2, h_5, h_6, h_9) \quad \text{(A}\cdot\text{22)}$$

なる選択が可能である。 $\{h_n\}_3$ は K が奇数であるため空集合となる。 x_i としては $\{h_n\}_1$ の他に $\{h_n\}_2$ から3個の要素を選択して構成される。例えば次のようになる。

$$x_i = (h_0, h_1, h_3, h_7, h_{10}), (h_1, h_2, h_5, h_6, h_{10}) \quad \text{(A}\cdot\text{23)}$$

x_i の選択の難しさは補題1で述べたように M の大きさに決まり、フィルタの次数などには依存しない。 M が4以上では x_i の選択は常に可能である。しかしながら振幅特性の近似にとって有効な x_i の選択と言う点ではさらに検討が必要であると思われる。

3. 補題2の略証

式(13c)においては $b_i^2 (i=1, 2, \dots, N_d)$ が用いられているため分母係数を x_i の要素に選択することはできない。分子係数 a_n および N_n を補題1の h_n および N と見なせば、以下の証明は補題1の証明から容易に導くことができる。但し、式(13c)を考慮すると(2)の条件下では $((2N-K))_M$ に対する条件を削除できる。

(証明終)

(昭和58年12月20日受付, 59年3月7日再受付)