

## 対称学習によるパターン分類の収束特性

三好 誠司<sup>†\*</sup>      池田 和司<sup>††</sup>      中山 謙二<sup>††</sup>

### Convergence Properties of Symmetric Learning Algorithm for Pattern Classification

Seiji MIYOSHI<sup>†\*</sup>, Kazushi IKEDA<sup>††</sup>, and Kenji NAKAYAMA<sup>††</sup>

あらまし 適応フィルタのためのアフィン射影アルゴリズム (APA) を基本パーセプトロンに適用したアルゴリズムとして等比学習アルゴリズム (GLA) が提案されている。本論文では、まず、GLA において学習定数を 2 とした場合として対称学習アルゴリズム (SLA) を提案する。次に、SLA の次数  $k$ 、パターン数  $P$ 、パターン次元  $N$  と収束性の関係についての理論検討を行い、 $P \geq 2N$  の場合に結合荷重初期値によらずに学習が収束するためには、 $k < N$  でなければならないことを明らかにする。更に、 $k$  と収束速度の関係についての理論検討を行い、 $k = N/2$  で平均的な収束速度が最大になることを明らかにする。これらは、計算機シミュレーションにより検証される。

キーワード パーセプトロン, パターン分類, アフィン射影アルゴリズム, 等比学習アルゴリズム, 対称学習アルゴリズム

#### 1. ま え が き

適応フィルタの分野において、正規化 LMS アルゴリズム [1],[2] をブロック信号処理に拡張したアルゴリズムとしてアフィン射影アルゴリズム (Affine Projection Algorithm, APA) [3] がよく知られている。

筆者らは文献 [4]~[7] で、基本パーセプトロンへの APA の適用として、等比学習アルゴリズム (Geometric Learning Algorithm, GLA) を提案した。GLA は、結合荷重ベクトルの毎回の更新を、 $k$  個のパターンベクトルの直交補空間に向かって垂直に行う学習アルゴリズムである。そしてこのとき  $k$  を GLA の次数とよぶ。文献 [4]~[7] においては更に、1 次 GLA で 2 個のパターンを分類する場合に学習が有限回の更新により収束する条件を理論的に導出した。その結果、学習が収束するための学習定数の上限と下限は解領域の角度によって決定されることが明らかになった。また、学習定数が 2 であれば線形分離可能なパターン分類問題に

対しては有限回の更新で学習が必ず収束することも理論的に示された。更に、パターン数が多い場合でも解領域の角度が学習収束性を評価するための良い指標となっており、解領域の角度、学習定数と収束特性の関係は、パターンが 2 個の場合とほぼ一致することが計算機シミュレーションにより示された。

更に筆者らは文献 [7],[8] で、1 次 GLA において学習定数を 2 に選ぶと、線形分離可能なパターン分類問題に対しては結合荷重初期値やパターン数によらず、学習が有限回の更新で必ず収束することを理論的に示した。

一般に、パターン分類問題において解領域の角度等の情報は学習以前には与えられていないから、GLA において学習定数を 2 に選ぶことには特別な意味がある。幾何的に考えると、学習定数が 2 の GLA は、更新に用いられるパターンベクトルの直交補空間に対して対称に結合荷重ベクトルを更新していくアルゴリズムであると言える。このように、学習定数が 2 の GLA は収束性の観点からも幾何的な観点からも特別な意味を有する。そこで、学習定数が 2 の GLA を、特に、対称学習アルゴリズム (Symmetric Learning Algorithm, SLA) とよぶことにする。

文献 [4]~[8] においては次数が 1 である場合の GLA

<sup>†</sup> 神戸高専電子工学科, 神戸市  
Department of Electronic Engineering, Kobe City College of  
Technology, Kobe-shi, 651-2194 Japan

<sup>††</sup> 金沢大学工学部電気・情報工学科, 金沢市  
Faculty of Engineering, Kanazawa University, Kanazawa-shi,  
920-8667 Japan

\* 現在, 金沢大学大学院自然科学研究科

の収束特性について理論的、数値的な解析がなされた。本論文では、次数を一般化した場合の収束特性に関する解析を行うことを目的とする。まず 2. において基本パーセプトロンについて述べる。3. においては、1次 GLA の収束特性に関して文献 [4]~[7] で既に明らかにされている知見について述べた後、GLA において学習定数を 2 に選んだ場合として SLA を提案する。4. においては、SLA の次数  $k$ 、パターン数  $P$ 、パターン次元  $N$  と収束性の関係についての理論検討を行う。更に、5. においては、SLA の次数  $k$  と収束速度の関係についての理論検討を行う。6. においては、4., 5. における検討結果を検証するための計算機シミュレーションの結果について述べる。

なお、本論文において分類の対象とするパターンベクトルは、その成分が実数であるランダムベクトルであるとする。よってこのときパターンセットを構成するパターンベクトルは確率 1 で一般の位置にある。すなわち、 $N' (< N)$  次元部分空間に含まれるパターンベクトルは  $N'$  個以下である。また、本論文においては、結合荷重ベクトルが解領域に到達して更新が終了することを、学習が収束する、と表現するものとする。更に、結合荷重ベクトル初期値によらずに学習が有限回の更新で収束することを、学習が大域収束する、と表現することにする。

## 2. 基本パーセプトロン

Rosenblatt によって提案された単純パーセプトロン [9] において、ユニットの出力関数がしきい値関数である場合を基本パーセプトロンとよぶ。その構造を図 1 に、入出力関係を式 (1), (2) に示す。

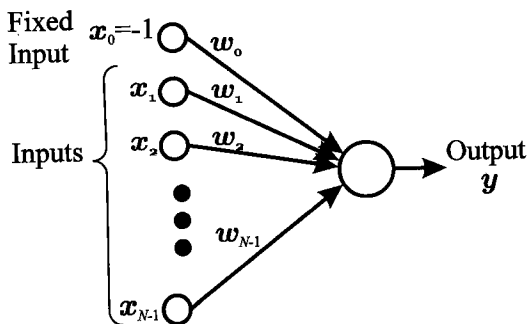


図 1 基本パーセプトロン  
Fig.1 Elementary perceptron.

$$u = \sum_{j=0}^{N-1} w_j x_j \tag{1}$$

$$y = \begin{cases} +1, & u \geq 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases} \tag{2}$$

式 (1) の  $u$  に 0 を代入すると、傾きが  $w_j (j = 0 \sim N - 1)$  で決定され原点を通る超平面を表す式になる。よって、基本パーセプトロンはパターン空間において超平面を境界とする二つのクラスを分類する能力を有すると言える。なお図 1 は、値として常に  $-1$  をとり、対応する結合荷重が  $w_0$  であるような固定入力  $x_0$  を追加することにより、しきい値を 0 とした基本パーセプトロンである。この基本パーセプトロンを、固定入力  $x_0$  をもたずにしきい値が 0 に限定されない場合と比較すると、入力の数  $1$  だけ増えるかわりに境界超平面が原点を通ることになり都合がよい。よって本論文においては図 1 の基本パーセプトロンを扱うことにする。また、この固定入力を含む入力の総数  $N$  をパターンの次元とよぶことにする。

## 3. 等比学習アルゴリズム (GLA) と対称学習アルゴリズム (SLA)

### 3.1 等比学習アルゴリズム

適応フィルタの分野で、正規化 LMS (NLMS) アルゴリズム [1], [2] をブロック信号処理に拡張したアルゴリズムとして、アフィン射影アルゴリズム (APA) が知られている [3]。等比学習アルゴリズム (GLA) は、APA を基本パーセプトロンによるパターン分類に適用したアルゴリズムとして提案された [4]~[7], [10]。すなわち、 $k$  次 GLA においては、各時点での結合荷重ベクトルの更新のために、その時点で式 (1), (2) とクラスが矛盾するパターンの中の  $k$  個を用いる。 $k$  次 GLA を以下に示す。

- [step1]  $w(0)$  を乱数で初期設定する。
- [step2] 式 (1), (2) とクラスが矛盾するパターンの個数を  $k_0$  とする。
- [step3]  $k_0 = 0$  なら収束と判定し終了する。
- [step4]

もし  $k_0 \geq k$  ならば

$$X = (x^1, x^2, \dots, x^k)^T \tag{3}$$

そうでないなら

$$X = (x^1, x^2, \dots, x^{k_0})^T \tag{4}$$

[step5] 結合荷重を次式で更新する.

$$\mathbf{w}(i+1) = \mathbf{w}(i) - \lambda \mathbf{X}^+ \mathbf{X} \mathbf{w}(i) \quad (5)$$

[step6] step2 に戻る.

ここで  $\mathbf{X}^+$  は  $\mathbf{X}$  の Moore-Penrose 一般逆行列である. また,  $T$  は行列の転置を表す. 式 (3), (4) において  $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^k$  または  $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^{k_0}$  は式 (1), (2) とクラスが矛盾するパターンから選択する. この選択をどのような規則で行うかについてはここでは規定しない.

### 3.2 1次 GLA の収束条件

図 2 は 2次元 2パターンの場合の 1次 GLA による結合荷重ベクトルの更新を示している. この図は学習が収束する場合を示しているが, 1次 GLA が常に収束するというわけではない. 文献[4]~[7]では, 1次 GLA で 2個のパターンの分類を学習する際に発振状態に陥る条件についての解析を行うことにより, 収束条件が理論的に導出された. すなわち, 1次 GLA が 2個のパターンに対して大域収束するための必要十分条件は以下の通りである.

- $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の場合

$$\frac{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})} + 1 > \lambda > \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} + 1 \quad (6)$$

- $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  の場合

$$\lambda > 1 \quad (7)$$

ここで,  $\theta$  は図 2 に示すように, 分類すべきパターンによって決まる解領域の角度である.

パターンが 3個以上になると, 解領域の形状が複雑になり, また, パターン提示の順序という自由度が加わるため, 収束あるいは発振状態に至るまでの学習の過程は一般には複雑になる. しかし, 原点から解領域

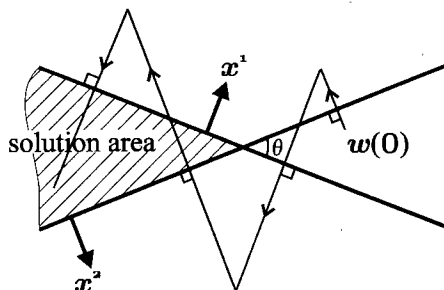


図 2 1次 GLA における結合荷重の更新  
Fig.2 Weights update process in 1-GLA.

を見た角度の最小値を解領域の角度とすると, この場合の収束条件が 2パターンに対する理論収束条件にほぼ一致することが文献[4]~[7]で明らかにされた.

### 3.3 対称学習アルゴリズム

式 (6), (7) からわかるように, 1次 GLA で 2個のパターンを分類する場合には学習定数  $\lambda$  が 2であれば学習は大域収束する. また, パターンが多い場合でも  $\lambda$  が 2であれば学習が大域収束することが文献[7], [8]で明らかにされている.

一般的にパターン分類においては, 解領域の角度などの情報は学習以前には得られていない. よって, 学習が大域収束する  $\lambda = 2$  は特別な意味を有する条件であると言える.

ここで,  $\lambda = 2$  の幾何的な意味について考えてみる. GLA においては, 選ばれたいくつかのパターンベクトルの直交補空間に向かって垂直に毎回の更新を行う. そして,  $\lambda = 2$  の場合には, 結合荷重ベクトルは, この部分空間に対して“対称な”ベクトルに更新されることになる.

このように,  $\lambda = 2$  の場合の GLA は, 収束性の観点からも幾何的な観点からも特別な意味を有する. そこで, この場合を新たに“対称学習アルゴリズム (Symmetric Learning Algorithm, SLA)”とよぶことにする.

### 4. k次 SLA の収束条件

本章では,  $k$ 次 SLA が収束するための, 次数  $k$ , パターン数  $P$ , パターン次元  $N$  の関係について理論検討を行う.

図 3 は, 次元  $N = 3$ , パターン数  $P = 6$  のパターン分類を 3次 SLA ( $k = 3$ ) で行う場合を示している. ここではパターン A ~ F を白色と黒色に分類しようとしている.  $S$  はすべてのパターンを正しく分類する結合荷重ベクトルのうちの一つである  $\mathbf{w}$  に垂直な平面である.  $S(i)$  は  $i$ 回更新後の結合荷重ベクトル  $\mathbf{w}(i)$  に垂直な平面であり, この時点において  $\mathbf{w}(i)$  は解領域内に到達していない.

$i$ 回の更新後, クラスと基本パーセプトロンの出力が矛盾するパターンは A, E, F の 3個である. いま  $k = 3$  であるから, 次の更新にはこれら三つのパターンすべてが用いられることになる. その場合, 次元  $N$  が 3 であるので, これら三つのパターンベクトルの直交補空間の次元は 0, すなわち, 結合荷重ベクトルの更新の対象は原点になる. よって, この更新により結

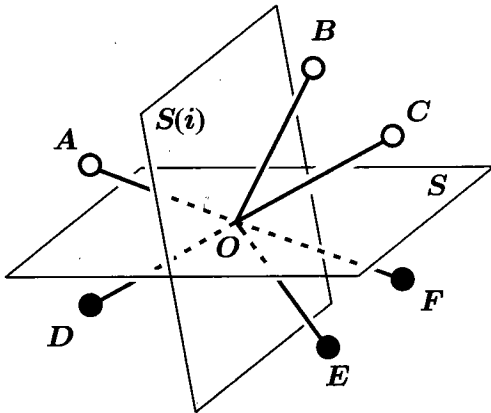


図3  $k \geq N$  の場合の SLA  
Fig.3 SLA in the case of  $k \geq N$ .

合荷重ベクトルは  $-1$  倍される, すなわち, 向きが  $180$  度変わることになる. そのとき平面  $S(i)$  の位置は変化しないから,  $i+1$  回の更新後において, クラスと基本パーセプトロンの出力が矛盾するパターンは B, C, D の 3 個になる.  $i+2$  回目の更新はまったく同様になされるので, 結局この場合の学習はこの位置で発振することになり, 収束しない. すなわち, この場合には,  $k < 2$  が学習が大域収束するための必要条件である.

同様に, 次数  $k$  とパターン次元  $N$  の間に  $k \geq N$  の関係があり, パターン数  $P$  が  $2N$  以上であれば, 結合荷重初期値によってはこのような発振が生じることを示すことができる. すなわち,  $k < N$  は  $P \geq 2N$  の場合に学習が大域収束するための必要条件である.

### 5. $k$ 次 SLA の収束速度

本章では, SLA において次数  $k$  をどのように選べば収束速度を最大とすることができるかについて理論検討を行う. なお, 本章では簡単のため, 毎回の更新で用いるパターンの選択は, その時点でクラスと基本パーセプトロンの出力が矛盾するパターンからランダムに行うものとする. また, 収束速度は学習が収束するまでの更新回数で評価するものとする.

図 4, 図 5 は, それぞれ 1 次 SLA, 2 次 SLA による結合荷重ベクトルの更新の例を示す. これらの例においてはパターン数  $P = 2$ , パターン次元  $N = 2$  であり, 結合荷重ベクトル初期値  $w(0)$  からそれぞれ 4 回, 1 回の更新で学習が収束している. もちろん, SLA における学習収束までの更新回数は与えられたパターン分類問題が同じであっても結合荷重ベクトル初期値に

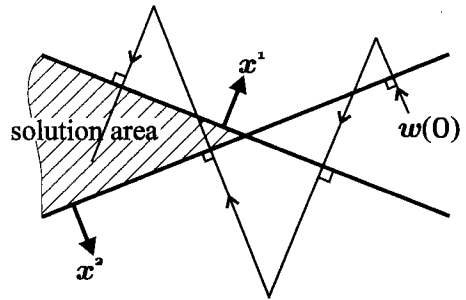


図4 1次 SLA における結合荷重の更新  
Fig.4 Weights update process in 1-SLA.

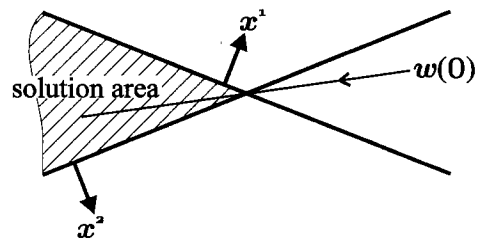


図5 2次 SLA における結合荷重の更新  
Fig.5 Weights update process in 2-SLA.

よって変化するので, 図 4 と図 5 は 1 次 SLA と 2 次 SLA の収束速度の比較の一例を示しているにすぎない. しかし, 1 次 SLA においては毎回の更新で一つのパターンに関して式 (1), (2) とクラスの矛盾を解決していくのに対して, 2 次 SLA においては二つのパターンに関して一挙に解決していくわけであるから, 1 次 SLA と 2 次 SLA を比較した場合には後者の収束速度の方が平均的には大きいと考えることができる.

それでは, SLA の収束速度は次数の増大につれて単調に増大するのであろうか. いま, 前章における SLA の収束条件に関する考察の結果をふまえ, パターン数  $P$  は十分に大きく, SLA の次数  $k$  とパターン次元  $N$  の間に  $k < N$  の関係があるとする. 以下では, パターン数  $P$  が十分大きく, パターンが一様分布とみなせる場合には,  $k$  次 SLA と  $(N - k)$  次 SLA が, 収束速度に関して等価であることを示し, その結果から  $k = N/2$  で収束速度が最大になることを導く.

既に述べたように,  $k$  次 SLA においては,  $k$  個のパターンベクトルの直交補空間に対称な位置に結合荷重ベクトルの更新を行っていく. 別の表現をすれば,  $k$  次 SLA の毎回の更新においては,  $k$  個のパターンベクトルが張る空間の成分だけを反転する. すなわちこ

のとき、パターンベクトル直交補空間への結合荷重ベクトル初期値  $w(0)$  の射影を  $w_k^c$ 、パターンベクトルが張る空間への射影を  $w_k^p$  とし、1回目の更新後の結合荷重ベクトルを  $w_k(1)$  とすると、以下の式が成り立つ。

$$w(0) = w_k^c + w_k^p \quad (8)$$

$$w_k(1) = w_k^c - w_k^p \quad (9)$$

また、 $(N - k)$  次 SLA の毎回の更新においては、 $(N - k)$  個のパターンベクトルが張る空間の成分だけを反転する。すなわちこのとき、パターンベクトル直交補空間への  $w(0)$  の射影を  $w_{N-k}^c$ 、パターンベクトルが張る空間への射影を  $w_{N-k}^p$  とし、1回目の更新後の結合荷重ベクトルを  $w_{N-k}(1)$  とすると、以下の式が成り立つ。

$$w(0) = w_{N-k}^c + w_{N-k}^p \quad (10)$$

$$w_{N-k}(1) = w_{N-k}^c - w_{N-k}^p \quad (11)$$

いま、 $w(0)$  から  $k$  次 SLA による更新と  $(N - k)$  次 SLA による更新を並列に開始する場合を考える。そしてそれらに間に、毎回選択されるパターンベクトルが張る空間が互いに直交する関係があるとする。この場合には以下の関係があることになる。

$$w_k^c = w_{N-k}^p \quad (12)$$

$$w_k^p = w_{N-k}^c \quad (13)$$

この場合には、式 (9), (11) より以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} w_{N-k}(1) &= w_{N-k}^c - w_{N-k}^p \\ &= w_k^p - w_k^c \\ &= -w_k(1) \end{aligned} \quad (14)$$

この式から、 $k$  次 SLA による1回目の更新後の結合荷重ベクトルと  $(N - k)$  次 SLA による1回目の更新後の結合荷重ベクトルは互いに  $-1$  倍、すなわち反転の関係にあることになる。そして、次の更新も同様に行ったとすると、その更新後の結合荷重ベクトルは完全に一致することになる。このように、 $k$  次 SLA と  $(N - k)$  次 SLA を考えると、収束に至るまでの過程において1回おきに結合荷重ベクトルが反転と一致を繰り返すような更新を考えることができる。

このことを説明するために、3次元パターンにおける1次 SLA と2次 SLA を例として、それらによる1回目の更新を図6に、2回目の更新を図7に示す。これらの図においてはパターンベクトルは省略されており、更新の対象となる補空間と結合荷重ベクトルの関係が示されている。

図6において  $C_1(1)$  は1次 SLA の1回目の更新の対象となる補空間であり、 $C_2(1)$  は2次 SLA の1回目の更新の対象となる補空間である。また、 $w(0)$  は結合荷重初期値を、 $w_1(1)$ 、 $w_2(1)$  はそれぞれ1次 SLA、2次 SLA の1回目の更新後の結合荷重ベクトルを表している。2次 SLA における補空間  $C_2(1)$  の選択を、1次 SLA において選択された補空間  $C_1(1)$

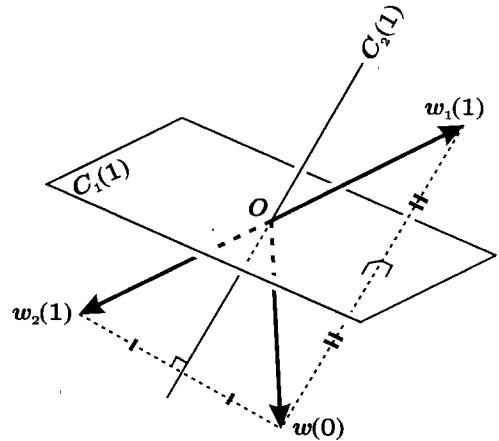


図6 1次 SLA と2次 SLA (1回目の更新)  
Fig.6 1-SLA and 2-SLA (1st update).

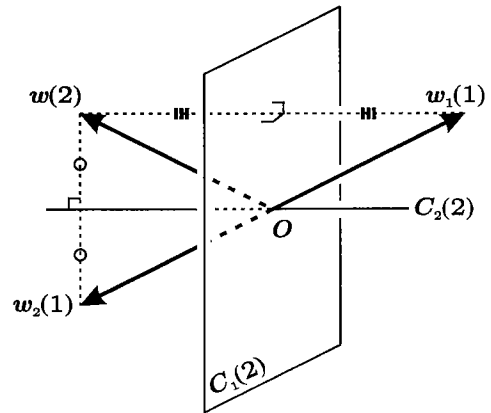


図7 1次 SLA と2次 SLA (2回目の更新)  
Fig.7 1-SLA and 2-SLA (2nd update).

と直交するようになったとすると、図 6 に示すように  $w_1(1) = -w_2(1)$  が成り立つ。

続く 2 回目の更新においても補空間が互いに直交するように選択したとすると、図 7 に示すように、1 次 SLA と 2 次 SLA のそれぞれ 2 回目の更新後の結合荷重ベクトルは一致し  $w(2)$  となる。

以後、収束まで補空間の選択を同様に行うとすれば、1 次 SLA と 2 次 SLA それぞれにおける結合荷重ベクトルの更新の過程は 1 回おきに反転と一致を繰り返すものとなる。

もちろん以上の説明は、パターン数  $P$  が十分大きくてパターンが一様分布とみなせるような場合に、収束に至るまでの経路が 1 回おきに一致するような  $k$  次 SLA と  $(N - k)$  次 SLA を考えることができることを示しているにすぎない。実際のパターン分類問題においてはパターンが一様分布ではないし、また、SLA の毎回の更新におけるパターンの選択もランダムに行われるのであるから、たとえ同一の結合荷重ベクトルから学習を開始したとしても、 $k$  次 SLA による学習経路と  $(N - k)$  次 SLA による学習経路が必ず 1 回おきに一致するわけではない。しかし、多くの結合荷重ベクトル初期値、多くのパターン提示順に関する平均的な収束速度に関しては、 $k$  次 SLA と  $(N - k)$  次 SLA は等価であるといえることができる。

これらは以下のようにまとめることができる。

- 1 次 SLA と 2 次 SLA のように次数がある程度小さい場合には次数が大きいほど高速である。
- $k$  次 SLA と  $(N - k)$  次 SLA は平均的な収束速度に関して等価である。

そしてこれらから、 $k = N/2$  において SLA の平均的な学習速度が最大になるものと考えられる。すなわち、SLA の平均的な収束速度を最大にするためには、その次数  $k$  をパターン次元  $N$  の  $1/2$  に選べばよい。これは、APA の収束速度が次数と単調な関係にある [3] ことと比較すると、SLA のきわめて興味深い特徴であると言える。

## 6. 計算機シミュレーション

### 6.1 SLA の次数 $k$ と学習収束性

4. における理論検討の結果を検証するために、SLA の次数  $k$  と学習収束性に関する計算機シミュレーションを行った。

まず、次元  $N = 3, 4, 7, 10$ 、パターン数  $P = 2 \sim 20$  で線形分離可能なパターン集合を、それぞれ 20 組用意

した。次にこれらの各パターン集合に対して、SLA の次数  $k$  を 1 から  $P$  まで変えて収束性を調べた。いま、学習が大域収束する条件、すなわち、結合荷重ベクトル初期値にかかわらずに収束する条件を調べることが目的であるので、各パターン集合、次数  $k$  ではランダムな結合荷重ベクトル初期値からの学習を 100 回行い、そのすべてで収束した場合を“大域収束する”、1 個でも収束しない初期値があった場合には“大域収束しない”と判定した。なお、それぞれの試行における判定は、1000 回以下の更新で収束するかどうかで行った。

計算機シミュレーションの結果、どのパターン集合においても、 $k = 1$  の場合には大域収束した。これは文献 [8] の証明を裏付ける結果である。また、 $k$  を大きくして行くところまでは大域収束するが、それ以上の  $k$  では結合荷重ベクトル初期値によっては収束しなくなった。学習が大域収束する次数  $k$  の上限を表 1 に示す。

表 1 で、たとえば、 $P = 18$ 、 $N = 7$  において“6”となっているのは、それぞれが 18 個の 7 次元パターンからなる 20 組のパターン集合すべてが、1~6 次では大域収束し、7 次以上では大域収束しなかったことを表している。また、次数上限として複数の数字が書かれているのは、パターン集合により上限が異なることを意味している。たとえば、 $P = 15$ 、 $N = 10$  において“8, 9,  $P$ ”となっているのは、それぞれが 15 個の 10 次元パターンからなる 20 組のパターン集合の中に、

表 1 SLA が収束する次数  $k$  の上限  
Table 1 Upper bound of order  $k$  for SLA convergence.

$P$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 7$	$N = 10$
2	$P$	$P$	$P$	$P$
3	$P$	$P$	$P$	$P$
4	1, $P$	$P$	$P$	$P$
5	2, $P$	2, 3, $P$	$P$	$P$
6	2	2, 3, $P$	$P$	$P$
7	2	3	$P$	$P$
8	2	3	$P$	$P$
9	2	3	$P$	$P$
10	2	3	5, 6, $P$	$P$
11	2	3	5, 6, $P$	$P$
12	2	3	5, 6, $P$	$P$
13	2	3	6	$P$
14	2	3	6	9, $P$
15	2	3	6	8, 9, $P$
16	2	3	6	7, 8, 9, $P$
17	2	3	6	8, 9, $P$
18	2	3	6	8, 9
19	2	3	6	9
20	2	3	6	9

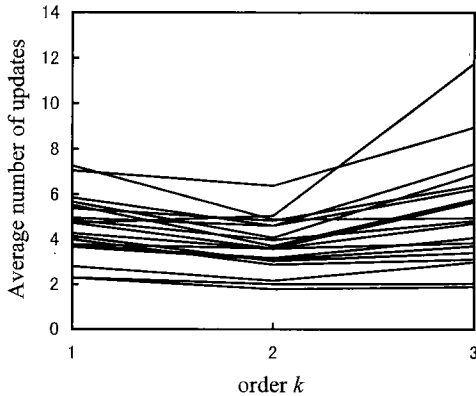


図8 学習収束までの平均更新回数 ( $N = 4, P = 10$ )  
 Fig.8 Average update number for convergence ( $N = 4, P = 10$ ).

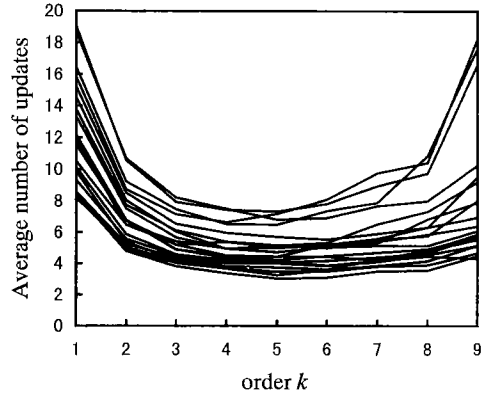


図10 学習収束までの平均更新回数 ( $N = 10, P = 20$ )  
 Fig.10 Average update number for convergence ( $N = 10, P = 20$ ).

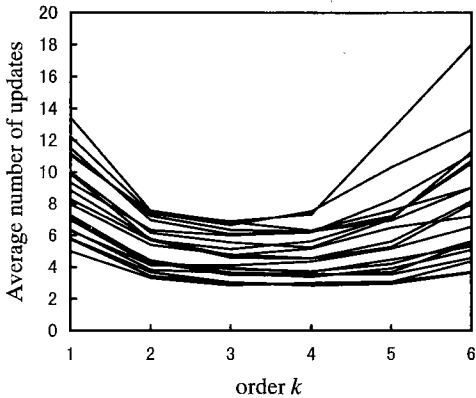


図9 学習収束までの平均更新回数 ( $N = 7, P = 16$ )  
 Fig.9 Average update number for convergence ( $N = 7, P = 16$ ).

1 ~ 8 次でのみ大域収束したパターン集合, 1 ~ 9 次でのみ大域収束したパターン集合, および 1 ~ 15 次すべてで大域収束したパターン集合の 3 種類のパターン集合が存在したことを表している。

この表から, SLA の次数  $k$ , パターン数  $P$ , パターン次元  $N$  と収束性の間に, 4. の理論検討の結果を含む, 以下のような興味深い関係があることがわかる。

- $P \geq 2N$ ,  $k \geq N$  の場合には学習は大域収束しない。これは 4. における理論検討が正しいことを裏付ける結果である。
- $P \geq 2N$ ,  $k < N$  の場合には学習は大域収束する。
- $2 \leq P \lesssim N$  の場合には SLA は次数に関係なく大域収束する。
- $N \lesssim P \lesssim 2N$  の場合には SLA が大域収束する次

数  $k$  の上限はパターン集合によってばらつく。しかも,  $2 \lesssim P \lesssim N$ ,  $P \geq 2N$  の場合には必ず大域収束するような低い次数  $k$  でも大域収束しない場合がある。

### 6.2 SLA の次数 $k$ と学習速度

5. における理論検討の結果を検証するために, 表 1 で行った計算機シミュレーションの中から,  $(N, P) = (4, 10), (7, 16), (10, 20)$  の三つの場合に関する学習収束までの平均更新回数を図 8~図 10 に示す。これらの図の中の各折れ線は, ひと組のパターン集合に対して結合荷重ベクトルを変えて行った 100 回の試行に関する学習収束までの平均更新回数を表す。

これらの図から, 学習が収束するまでの平均更新回数にはパターン集合による多少のばらつきはあるものの, 学習が収束する範囲内の次数  $k$ , すなわち  $k < N$  なる  $k$  と学習速度の間に以下の関係があることがわかる。

- 次数  $k$  が大きくても小さくても平均的には学習は遅くなる。
- $k = N/2$  程度で平均的には学習はもっとも速くなる。これらの結果は 5. での理論検討が正しいことを裏付けるものである。

## 7. むすび

本論文では, まず等比学習アルゴリズム (GLA) において特に学習定数を 2 とした場合として, 対称学習アルゴリズム (SLA) を提案した。次に, SLA の次数  $k$ , パターン数  $P$ , パターン次元  $N$  と収束性の関係についての理論検討, 次数  $k$  と収束速度の関係につ

いての理論検討を行い、更に、計算機シミュレーションによる検証を行った。その結果、 $P \geq 2N$  の場合に結合荷重初期値によらずに学習が収束するためには、 $k < N$  でなければならないこと、学習速度を最大にするためには次数  $k$  をパターン次元  $N$  の  $1/2$  に選べばよいことがわかった。

## 文 献

- [1] B. Widrow and M.E. Hoff, Jr, "Adaptive switching circuits," IRE WESCON Conv. Rec., pt.4, pp.96-104, 1960.
- [2] J.I. Nagumo and A. Noda, "A learning method for system identification," IEEE Trans. Autom. Control, vol.AC-12, pp.282-287, 1967.
- [3] 尾関和彦, 梅田哲夫, "アフィン部分空間への直交射影を用いた適応フィルタ・アルゴリズムとその諸性質," 信学論 (A), vol.J67-A, no.2, pp.126-132, Feb. 1984.
- [4] 三好誠司, 中山謙二, "基本パーセプトロンの等比学習とその収束条件," 信学'97 総大, D-2-35, March 1997.
- [5] 三好誠司, 中山謙二, 池田和司, "基本パーセプトロンの等比学習とその収束特性," 信学技報, NC97-5, May 1997.
- [6] S. Miyoshi and K. Nakayama, "A geometric learning algorithm for elementary perceptron and its convergence analysis," Proc. 1997 IEEE Int. Conf. on Neural Networks, Houston, Texas, USA, pp.1913-1918, June 1997.
- [7] 三好誠司, 池田和司, 中山謙二, "基本パーセプトロンの等比学習とその収束条件," 信学論 (A), 現在条件付き採録で再提出中.
- [8] 池田和司, 三好誠司, 中山謙二, "神経学習における正規化 LMS アルゴリズムの収束条件," 日本神経回路学会誌, 印刷中.
- [9] F. Rosenblatt, "The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain," Psychological Review, vol.65, pp.386-408, 1958.
- [10] 服部元信, 萩原将文, "双方向連想メモリの交点学習法," 電学論 (C), vol.116-C, no.7, pp.755-761, July 1996.

(平成 9 年 7 月 25 日受付)



池田 和司 (正員)

平 1 東大・工・計数卒。平 6 同大学院博士課程了。工博。同年金沢大・工・電気・情報工学科助手、現在に至る。平 7 香港中文大・工・計算機科学科研究員。計算論的学習理論、適応システム、ニューロダイナミックスの研究に従事。IEEE、神経回路学会、応用数理学会各会員。



中山 謙二 (正員)

昭 46 東工大・工・電子卒。昭 46~47 同大学院研究生。昭 58 工博 (東工大)。昭 47 NEC 入社。伝送通信事業部および C&C システム研究所にて、通信用各種フィルタおよびデジタル信号処理の研究開発に従事。昭 63 金沢大・工・電気・情報工学科助教授、平 2 同教授となり現在に至る。最近の研究テーマは主として適応信号処理およびニューラルネットワーク。昭 62. 9 IEEE Circuits & Devices Mag. 論文賞受賞。著書「SC 回路網の設計と応用」(東海大学出版会) 他。IEEE シニア会員、INNS 会員。



三好 誠司 (正員)

昭 61 京大・工・電気卒。昭 63 同大学院修士課程了。同年 NEC 入社。宇宙開発事業部にて人工衛星搭載用通信機器、特に ADEOS に搭載する衛星間通信用 S バンドトランスポンダの開発に従事。平 6 より神戸高専・電子工学科・講師、在職のまま平 7 より金沢大学大学院・自然科学研究科・博士課程在学中。ニューラルネットワークによる連想記憶、パターン分類に関する研究に従事。電気学会会員。